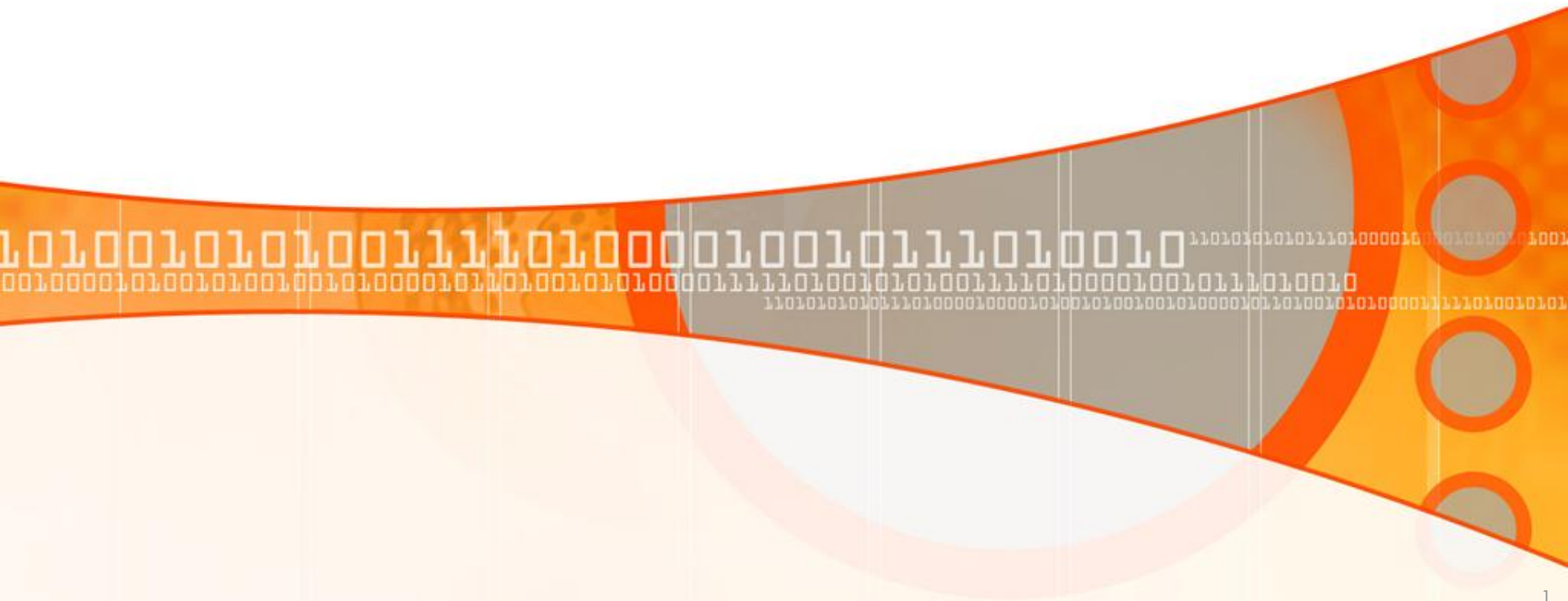
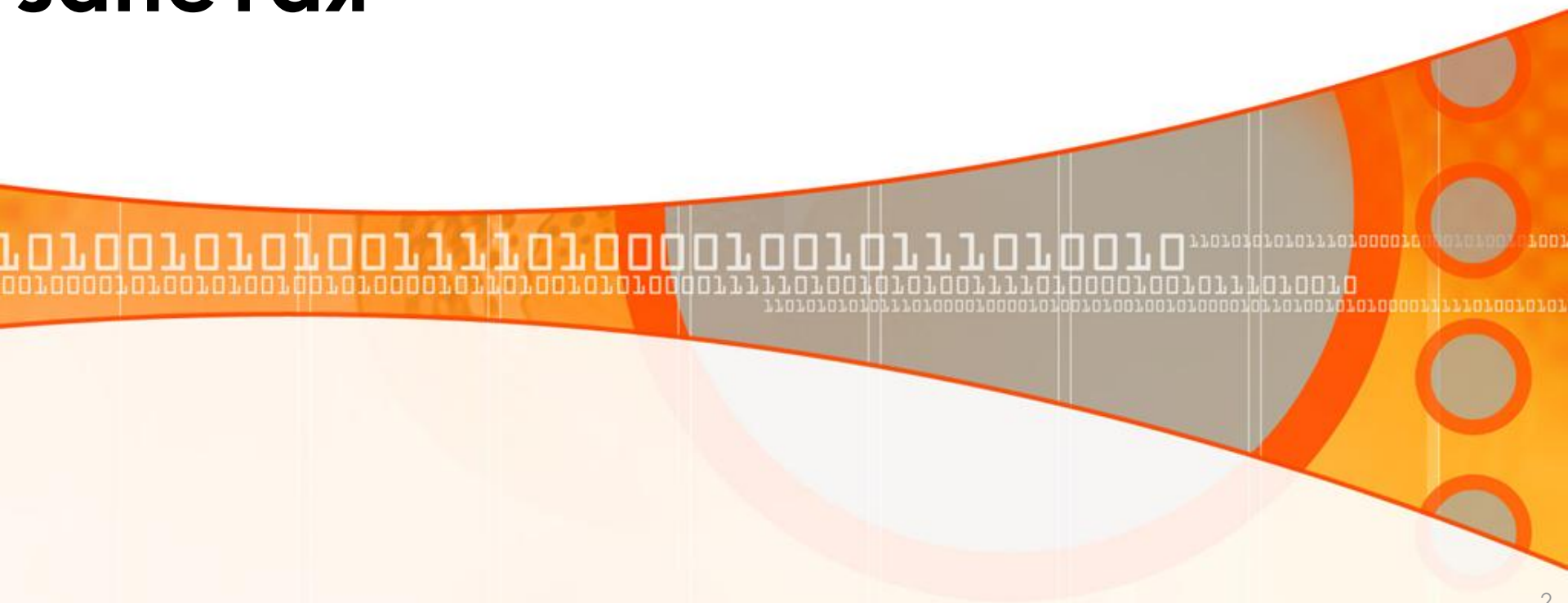


Организация на компютъра



Лекция 4, Лекция 5: Операционни структури за работа с плаваща запетая



Съдържание

Операционни структури за работа с плаваща запетая

Аритметика с плаваща запетая. Алгоритми на операция събиране и операция изваждане

Операция умножение

Операция деление

Техника на скрития бит и техника на измествения порядък.

Логически структури на устройства за работа с плаваща запетая

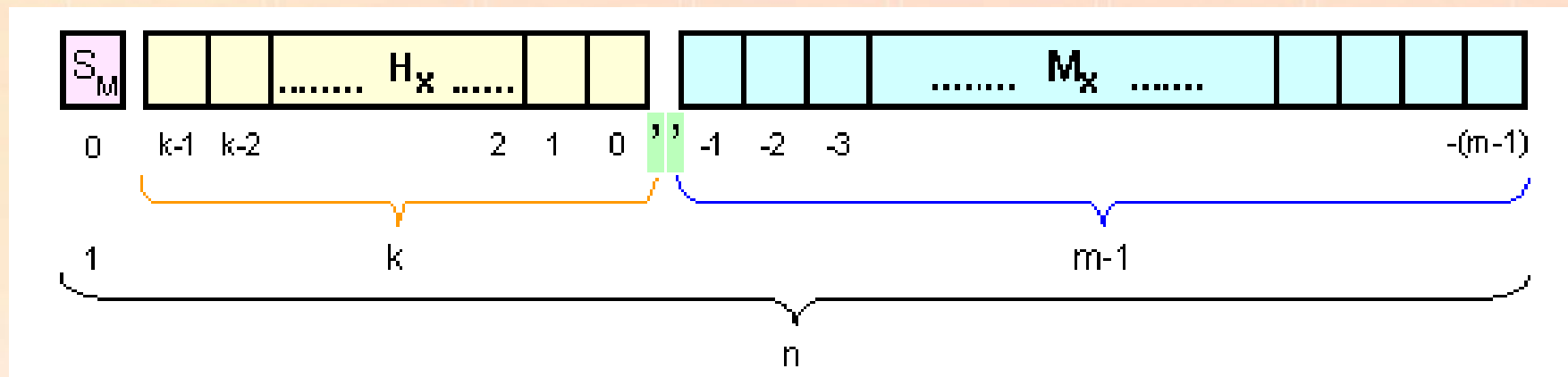


Операционни структури

Операции върху числа с плаваща запетая

Мантисата е число с ляво фиксирана запетая, а
порядъкът е число с дясно фиксирана запетая.

**Реалното число, представено във форма с плаваща
запетая, се разглежда винаги като число със знак.**



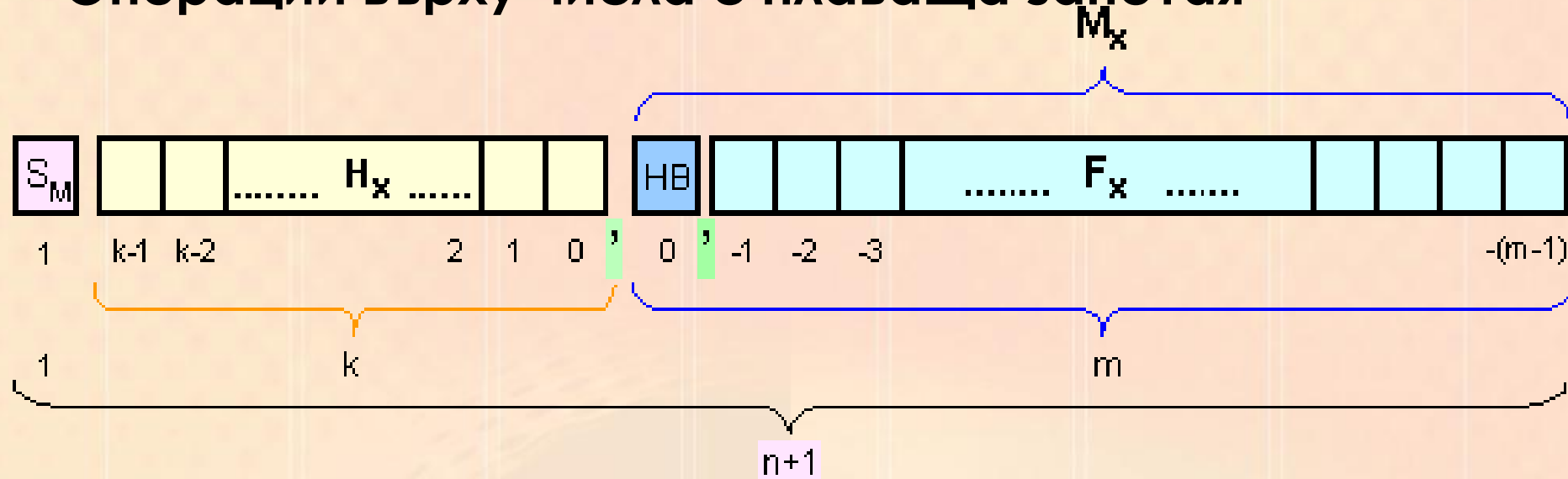
Структура на РМ с **ПЗ** и изместен порядък

$$X = M_x \cdot 2^{(H_x - D)}$$

$$0,1 \leq |M| < 1,0$$
$$D = 2^{k-1}$$

Видове данни – Числови данни

Операции върху числа с плаваща запетая



Структура на РМ с ПЗ, с изместен порядък и скрит бит

- Скритият бит на мантисата присъства само по време на изчисленията. При запомняне на числата в паметта скритият бит не се съхранява.
- Едно число във форма с плаваща запетая, с нормализарана мантиса, с изместен порядък и с техника на скрития бит, се определя така:

$$X = \pm 1, F_x \cdot 2^{\pm[H_x - (D-1)]}$$

Операционни структури

Операции върху числа с плаваща запетая

Операции **събиране** и **изваждане**

$Z=X+Y$, $Z=X-Y$ – свеждат се до операция събиране

$$X \pm Y = M_z \cdot q^{p_z} = M_x \cdot q^{p_x} \pm M_y \cdot q^{p_y}$$

Ако за порядъците е изпълнено съотношението $p_x < p_y$ и изнесем зад скоби мащабния коефициент на първия операнд, ще получим следния израз:

$$Z = \left(M_x \pm M_y \cdot q^{(p_y - p_x)} \right) \cdot q^{p_x}$$

Според този израз, преди да се извърши основната операция събиране, трябва да се извърши операцията умножение на мантисата M_y с новополучения мащаб $q^{(p_y - p_x)}$.

Мантисата M_y трябва да се измести относно фиксираната запетая на толкова разряда, колкото е модулът на разликата от порядъците. **Посоката** на изместване се определя от **знака** на същата разлика.

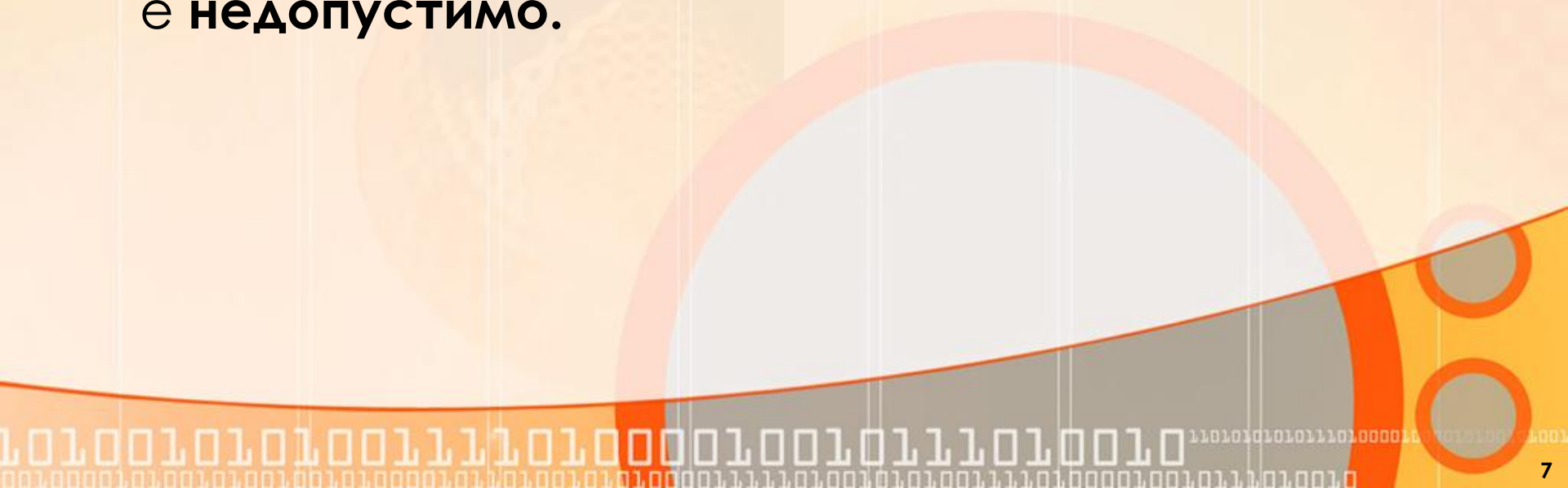
Операционни структури

Операции върху числа с плаваща запетая

Операции **събиране** и **изваждане**

Ако $(p_y - p_x)$ е положително число, мантисата M_y трябва да се измести **наляво**.

Изместването наляво е **крайно опасно** поради факта, че мантисата се намира в поле с ляво фиксирана запетая. Всяко изместване наляво означава **загуба** на старши значещи цифри от мантисата M_y , което е **недопустимо**.



Операционни структури

Операции върху числа с плаваща запетая

Операции **събиране** и **изваждане**

За практическата реализация на операция събиране **не е без значение** кой от мащабните коефициенти ще бъде изнесен зад скоби. За предпочитане е да бъде изнесен мащабният коефициент, който съответствува на **по-големия порядък**. В този случай разликата на порядъците ще бъде **гарантирано отрицателна**. Това означава, че мантисата, която ще се денормализира, ще се измества **винаги и само надясно**.

Операционни структури

Операции върху числа с плаваща запетая

Операции **събиране** и **изваждане**

$$Z = X \pm Y = \begin{cases} \left[M_x \pm M_y \cdot q^{-(p_x - p_y)} \right] \cdot q^{p_x}, & \text{ако } p_x \geq p_y; \\ \left[M_x \cdot q^{-(p_y - p_x)} \pm M_y \right] \cdot q^{p_y}, & \text{ако } p_x < p_y. \end{cases}$$

Операционни структури

Операции върху числа с плаваща запетая

Операции **събиране** и **изваждане**

Алгоритъмът е последователност от следните общи етапи:

1. Проверка на значенията на мантисите.

Ако мантисата на втория операнд $M_y = 0$, то за резултат се приема първият операнд: $Z = X$.

Ако мантисата на първия операнд $M_x = 0$, то за резултат се приема:

- При събиране - вторият операнд $Z = Y$;
- При изваждане - $Z = -Y$.

Операционни структури

Операции върху числа с плаваща запетая

Операции **събиране** и **изваждане**

Алгоритъмът е последователност от следните общи етапи:

2. Сравнение на порядъците.

За да се направи необходимият избор, порядъците p_x и p_y се сравняват.

Ако разликата между порядъците е толкова голяма, че числата се оказват несравними, т.е. ако $|p_x - p_y| \geq (m - 1)$, където с m е означена дължината на полето от разрядната мрежа, в което се представя мантисата, то за резултат се приема операндът с по-големия порядък.

Ако $(p_x - p_y) > 0$, то $Z = X$,

Ако $(p_x - p_y) < 0$, то $Z = Y$ при събиране и $Z = -Y$ при изваждане.

Операционни структури

Операции върху числа с плаваща запетая

Операции **събиране и изваждане**

Алгоритъмът е последователност от следните общи **етапи**:

Ако порядъците са равни, т.е. ако $(p_x - p_y) = 0$, то следващият (трети) етап се прескача.

3. Изравняване на порядъците.

Изравняване на порядъците се извършва чрез изместване на мантисата **налясно** на онзи операнд, който има по-малък порядък.

Изместването се извършва, докато изчислената разлика $(p_x - p_y)$ се нулира, т.е. докато се постигне равенството $p_x = p_y$.

Операционни структури

Операции върху числа с плаваща запетая

Операции **събиране** и **изваждане**

Алгоритъмът е последователност от следните общи етапи:

4. Събиране на мантисите.

Извършва се събиране (изваждане) на така подготвените мантиси на двата операнда. Това става с използване на **допълнителен код**.

Получената сума е **предварителната стойност** на мантисата на резултата.

В получения вид обаче, тази мантиса не може да остане, тъй като най-вероятно тя **не е** нормализирана.



Операционни структури

Операции върху числа с плаваща запетая

Операции **събиране и изваждане**

Алгоритъмът е последователност от следните общи етапи:

5. Нормализация на резултата.

Ако получената сума, която трябва да съответства на M_z , е нула, то нормализацията е невъзможна. Тогава за резултат се приема машинната нула. В зависимост от машинния код, използван за представяне на мантисата, машинната нула може да бъде със знак или без знак.

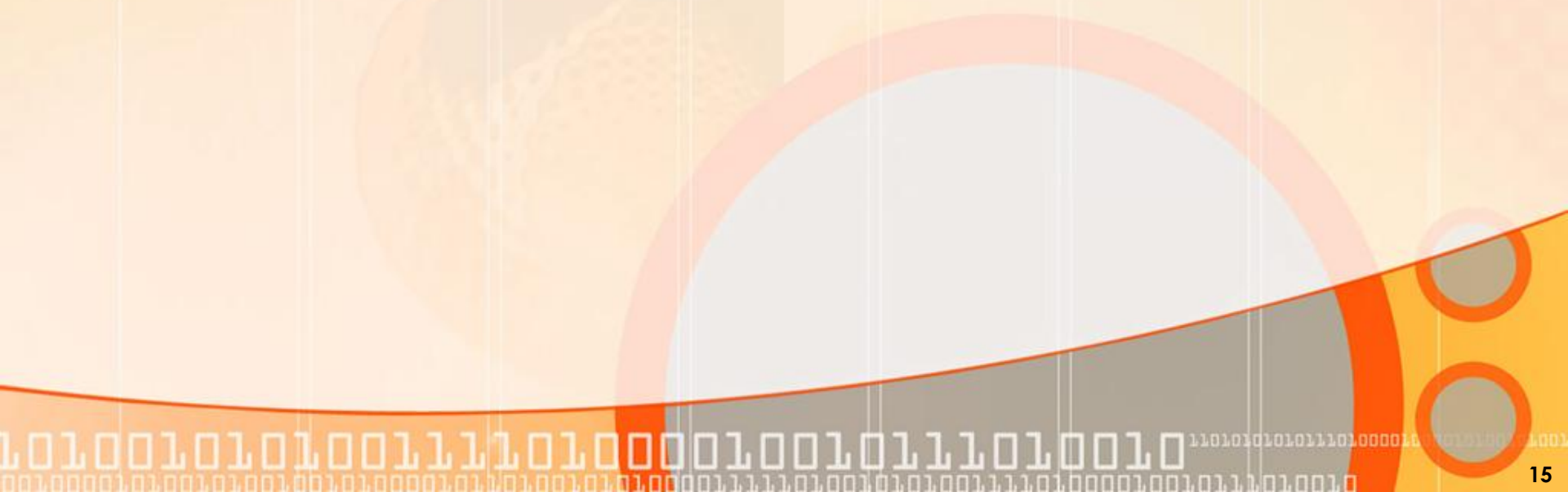
Операционни структури

Операции върху числа с плаваща запетая

Операции **събиране и изваждане**

Тези закони не биха били в сила, ако в системата с плаваща запетая за дробната мантиса вместо прав код се използваше допълнителен код.

Ето защо при представяне на числата във форма с плаваща запетая правият код има определено теоретично предимство пред допълнителния код!



Операционни структури

Операции върху числа с плаваща запетая

Операция **умножение**

$$Z = X.Y = \left(M_x . q^{p_x} \right) . \left(M_y . q^{p_y} \right)$$

$$Z = M_z . q^{p_z} = M_x . M_y . q^{(p_x + p_y)} .$$

$$M_z = M_x . M_y , \quad p_z = p_x + p_y .$$

Следва, че алгоритъмът на операция умножение на числа с плаваща запетая практически се свежда към този за операция умножение на числа с фиксирана запетая.

Умножението на мантисите и събирането на порядъците са абсолютно **независими** операции и те могат да се изпълняват **паралелно** във времето.



Операционни структури

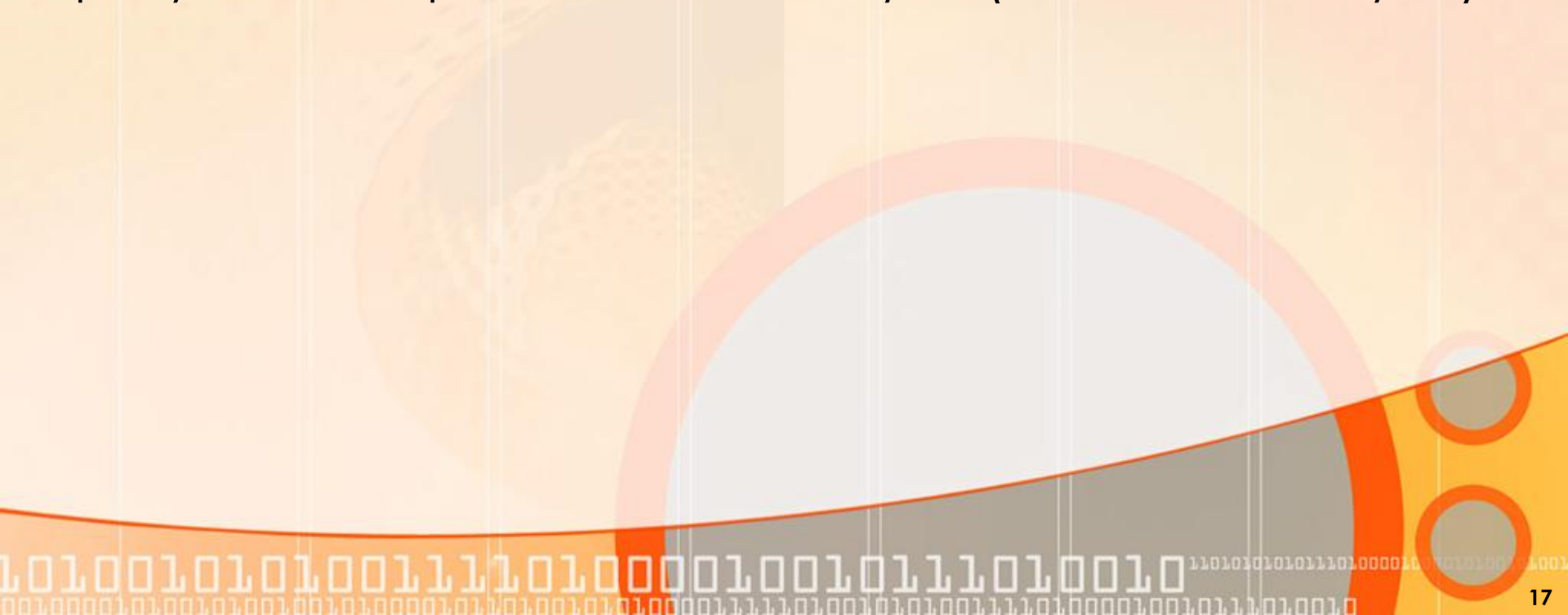
Операции върху числа с плаваща запетая

Операция **умножение**

Алгоритъмът на тази операция съдържа следните етапи:

1. Проверка на значенията на мантисите.

В случай че един от множителите е числото нула, то за резултат се приема числото нула (машинната нула).



Операционни структури

Операции върху числа с плаваща запетая

Операция **умножение**

Алгоритъмът на тази операция съдържа следните етапи:

2. Същинско умножение.

Ако мантисите на числата са различни от нула, то следва да се изпълни същинското умножение.

Мантисите се умножават като числа с **ляво фиксирана запетая** според един от вече разгледаните алгоритми за умножение.

Мантисите се **умножават по модул**, а знакът на произведението се формира **отделно**.



Операционни структури

Операции върху числа с плаваща запетая

Операция **умножение**

Алгоритъмът на тази операция съдържа следните етапи:

2. Същинско умножение.

Мантисите на съмножителите са нормализирани, така че модулът на произведението им $|M_x \cdot M_y|$ е число, което се намира в диапазон, който се формира от минималния и максималния модул на съмножителите:

$$q^{-2} \leq |M_x \cdot M_y| \leq [1 - q^{-(m-1)}]^2,$$

което означава, че може да има ненормализиран вид с ниво на недостиг не по-голямо от единица ($r=1$), т.е. предварителната стойност на мантисата на произведението може да има един от следните два вида:

- $\pm 0,01zzz...zz$ - лява граница на диапазона;
- $\pm 0,1zzzz...zz$ - дясна граница на диапазона.

Алгоритъмът за умножение трябва да завършва с процедурата за **нормализация** на резултата.

Операционни структури

Операции върху числа с плаваща запетая

Операция **умножение**

Алгоритъмът на тази операция съдържа следните етапи:

2. Същинско умножение.

Паралелно с умножението на мантисите може да се извърши **събиране на порядъците**.

Тъй като порядъците са числа със знак, това се извършва **в допълнителен код**.

Получената сума е само предварителна стойност на порядъка на резултата. При получаване на тази сума е възможно да настъпи препълване, което следва да се интерпретира във връзка с полученото произведение.



Операционни структури

Операции върху числа с плаваща запетая

Операция **умножение**

Алгоритъмът на тази операция съдържа следните етапи:

3. Нормализация на резултата.

Възможното ниво за недостиг в произведението на мантисите е предварително известно и евентуалното изместване на мантисата е **само на един разряд.**

Освен това при формиране на окончателния резултат се налага да се вземат под внимание още и резултатът от събирането на порядъците и формата на резултата, който е възможно да наложи закръгляване на мантисата.



Операционни структури

Операции върху числа с плаваща запетая

Операция **умножение**

Алгоритъмът на тази операция съдържа следните етапи:

3. Нормализация на резултата.

Когато се налага нормализиране на мантисата M_z чрез изместване наляво на един разряд, трябва да се извърши и компенсиране на порядъка p_z , чрез изваждане на единица от неговата предварителна стойност. Ако предварителната стойност на порядъка е равна на минимално възможната p_{min} , то следващото компенсиране $p_{min} - 1$, ще доведе до отрицателно препълване в полето на порядъка. Тогава като резултат следва да се формира числото нула (машинна нула). Ако потребителят желае да не загуби значещата част на произведението, то той може да остави за порядък числото и да установи условието за денормализиран резултат, т.е. в този случай произведението ще има вида:

$$Z = M_z \cdot q^{p_z} = (\pm 0,01zzz...zz) \cdot q^{p_{min}}$$

Операционни структури

Операции върху числа с плаваща запетая

Операция **умножение**

Алгоритъмът на тази операция съдържа следните етапи:

3. Нормализация на резултата.

Отрицателното препълване може да надхвърли двойно възможностите на полето на порядъка, т.е. реалната сума на двата порядъка може да достигне стойността $2.p_{min}$.

В този случай е безсмислено изпълнението на същинското умножение на мантисите и за резултат от операцията може да се приема отново числото нула.

Операционни структури

Операции върху числа с плаваща запетая

Операция **умножение**

Алгоритъмът на тази операция съдържа следните етапи:

3. Нормализация на резултата.

При събиране на порядъците, освен отрицателно препълване, напълно възможно е и *положително препълване*, при това в същата степен, т.е. реалната сума на двата порядъка може да достигне стойността $2.p_{max}$.

Положителното препълване в полето на порядъка е причина за окончателно препълване на разрядната мрежа и се сигнализира с отделен признак **"препълване при плаваща запетая"**.

В този случай същинското умножение на мантисите е безсмислено и може да се предотврати, а за резултат може да се приеме абстракцията безкрайност.

Операционни структури

Операции върху числа с плаваща запетая

Операция **деление**

$$Z = \frac{X}{Y} = M_z \cdot q^{p_z} = \frac{M_x \cdot q^{p_x}}{M_y \cdot q^{p_y}}$$

$$Z = M_z \cdot q^{p_z} = \frac{M_x}{M_y} \cdot q^{(p_x - p_y)}$$

Частното Z ще има мантиса M_z , която ще се получи в резултат на деление на мантисите на двата операнда, а порядъкът му p_z ще се получи като разлика от порядъците на делимото и делителя:

$$M_z = \frac{M_x}{M_y}, \quad p_z = p_x - p_y$$

Операция деление на числа с плаваща запетая се осъществява чрез познатите операции деление и изваждане на числа с фиксирана запетая.

Тези две операции са **независими** и могат да се изпълняват **паралелно** във времето.

Операционни структури

Операции върху числа с плаваща запетая

Операция **деление**

Алгоритъмът на тази операция съдържа следните етапи:

1. Проверка на значенията на мантисите.

Логически проверки, отнасящи се до условието за изпълнимост и условието за дефинираност на операцията - изисква се проверка на мантисата на делителя.

При делител нула операцията завършва с флаг за препълване и резултат +безкрайност или - безкрайност.



Операционни структури

Операции върху числа с плаваща запетая

Операция **деление**

Алгоритъмът на тази операция съдържа следните етапи:

1. Проверка на значенията на мантисите.

Мантисите на двата операнда са с ляво фиксирана запетая, при това са нормализирани. Ето защо мантисата на частното може да се разглежда като полином винаги от нулев ред, чиито коефициенти се получават последователно от старшите към младшите в резултат на m на брой последователни преходи в цикъла на същинското деление.

С други думи етапът на лявата нормализация в алгоритъма липсва, а броят на неизвестните цифри на частното е предварително известен – те са m на брой, т.е. предварителната стойност на мантисата на частното се търси във вида:

$$Mz = z,zzz \dots z.$$

В случай че делимото е числото нула, за резултат се приема числото нула и операцията завършва.

Операционни структури

Операции върху числа с плаваща запетая

Операция **деление**

Алгоритъмът на тази операция съдържа следните етапи:

2. Същинско деление.

Когато и двата операнда са различни от нула, мантисите трябва да се разделят фактически, при което се получава m -разрядно число. Това число има цяла част, която може да бъде различна от нула, ето защо следва да оценим възможния диапазон за отношението.

Модулът на полученото частно се намира в границите:

$$q^{-1} < \left| \frac{M_x}{M_y} \right| \leq q - q^{-(m-2)}$$

които са получени, като се имат предвид стойностите на минималната и на максималната нормализирана мантиса в разрядната мрежа.

Операционни структури

Операции върху числа с плаваща запетая

Операция **деление**

Алгоритъмът на тази операция съдържа следните етапи:

2. **Същинско деление.**

От указаните граници става ясно, че мантисата може да се получи като нормализирана или като ненормализирана отдясно, т.е. предварителната стойност на мантисата на частното може да има един от следните два вида:

- $\pm 0,1zzz...zz$ - лява граница на диапазона;
- $\pm 1,zzzz...zz$ - дясна граница на диапазона.

С други думи отношението на мантисите може да бъде *нормализирано число или число с препълване.*

Следователно алгоритъмът за деление трябва да завършва с процедурата за **нормализация** на резултата. Ако такава е необходима, частното се измества на един разряд надясно, а порядъкът се компенсира с прибавяне на една единица.



Операционни структури

Операции върху числа с плаваща запетая

Операция **деление**

Алгоритъмът на тази операция съдържа следните етапи:

2. Същинско деление.

Паралелно с делението на мантисите може да се извърши *изваждане на порядъците*.

Тъй като порядъците са числа със знак, това се извършва в допълнителен код.

Получената разлика е само предварителна стойност на порядъка на резултата.

При получаване на тази разлика е възможно да настъпи препълване, което следва да се интерпретира във връзка с полученото частно.



Операционни структури

Операции върху числа с плаваща запетая

Операция **деление**

Алгоритъмът на тази операция съдържа следните етапи:

3. Нормализация на резултата.

В случай че се налага изместване на предварителната стойност на мантисата надясно на един разряд, е необходима *компенсация на порядъка*.

Към предварителната стойност на порядъка се прибавя единица, при което е възможно да настъпи *положително препълване* в полето на порядъка. Положителното препълване е само на един порядък и е възможно, ако предварителната стойност на порядъка е равна на p_{\max} .

Предварителната стойност на частното в този случай може да се изрази така:

$$Z = M_z \cdot q^{p_z} = (\pm 1, zzz \dots zz) \cdot q^{p_{\max}}$$

Операционни структури

Операции върху числа с плаваща запетая

Операция **деление**

Алгоритъмът на тази операция съдържа следните етапи:

3. Нормализация на резултата.

Това е ситуация, при която, след опит да се отстрани препълването в полето на мантисата, се получава препълване в полето на порядъка и обратно.

Този ситуация е **непоправима**, в резултат на което може да се вземе решение за окончателно **"препълване при плаваща запетая"**.

Операционни структури

Операции върху числа с плаваща запетая

Операция **деление**

Описаните две препълвания са взаимно свързани и **не могат** да се преодолеят.

Единственият шанс този резултат да се запази като нормален и да участва в следващите изчисления е той да се приеме в този си вид, което е възможно само в разрядна мрежа, използваща **техниката на скрития бит**.

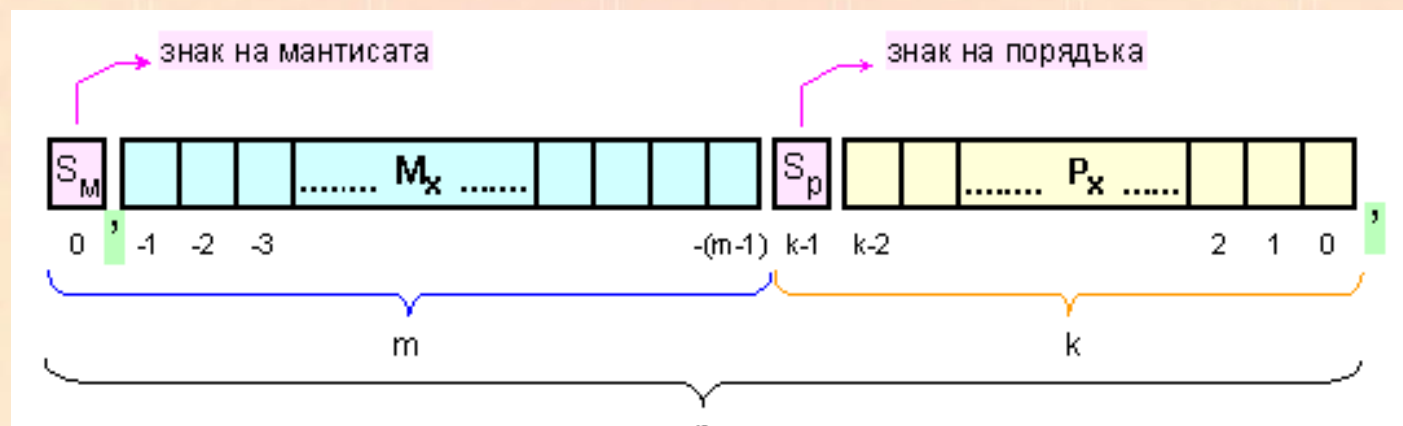
Този факт е една допълнителна обосновка за прилагането на тази техника в стандарта на IEEE.



Операционни структури

Логическа структура на устройство за работа с
плаваща запетая с натрупващ суматор

Структура на разрядната мрежа

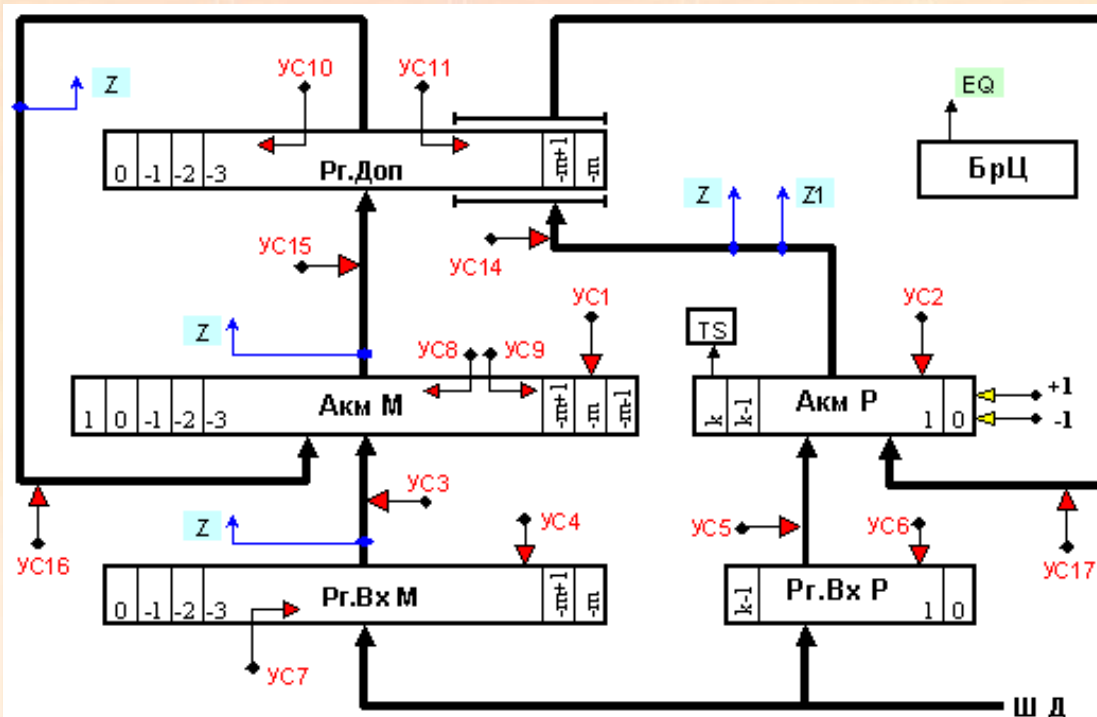


Мантисата и порядъкът на числата са представени
като числа със знак в прав код

За реализация на операциите събиране и изваждане
за вътрешен инверсен код се
използва **модифициран обратен код**.

Операционни структури

Логическа структура на устройство за работа с плаваща запетая с натрупващ суматор



YC1 : АкмМ := not(АкмМ[-1+ -m-1]) ,
 YC2 : АкмР := not(АкмР[k-2+0]) ,
 YC3 : АкмМ := (АкмМ) + (PrВхМ) ,
 YC4 : PrВхМ := not(PrВхМ[-1+ -m]) ,
 YC5 : АкмР := (АкмР) + (PrВхР) ,
 YC6 : PrВхР := not(PrВхР[k-2+0]) ,
 YC7 : PrВхМ := АИД(PrВхМ) ,
 YC8 : АкмМ := ЛИЛ(АкмМ) ,
 YC9 : АкмМ := АИД(АкмМ) ,
 YC10 : PrДоп := ЛИЛ(PrДоп) ,
 YC11 : PrДоп := ЛИД(PrДоп) ,
 YC12 : PrДоп := (АкмР) ,
 YC13 : PrДоп := (АкмМ) ,
 YC14 : АкмМ := (PrДоп) ,
 YC15 : АкмР := (PrДоп) ,
 YC16 : EQ := (PrДоп) ,
 YC17 : Z1 := (PrДоп)

Z - флагов за съдържание нула (Zero) ;

Z1 - флаг за условието $|p_x - p_y| \geq (m-1)$.

Операционни структури

Логическа структура на устройство за работа с
плаваща запетая с натрупващ суматор

- *Изпълнение на операция събиране*



Операционни структури

Логическа структура на устройство за работа с
плаваща запетая с натрупващ суматор

- *Изпълнение на операция умножение*

Операционни структури

Логическа структура на устройство за работа с
плаваща запетая с натрупващ суматор

- *Изпълнение на операция деление*



Литература:

- [1]. <http://tyanev.com/> - On-line книги – ОРГАНИЗАЦИЯ НА КОМПЮТЪРА – книга [1]
- [2]. <http://tyanev.com/> - On-line книги – ОРГАНИЗАЦИЯ НА КОМПЮТЪРА – упражнения книга [2];
- [3]. Димитър Тянев, ОРГАНИЗАЦИЯ НА КОМПЮТЪРА, том първи (ISBN 978-954-20-0412-7), Варна 2008г.
- [4]. Димитър Тянев, ОРГАНИЗАЦИЯ НА КОМПЮТЪРА - упражнения, ISBN 978-954-20-0258-0, Варна 2007г.