Упражнение 6

Таблична форма на симплекс метода

Симплекс методът се основава на свойствата на върховете на каноничната задача, разгледани в предишните две упражнения.

Нека $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{x}}_B, \bar{\mathbf{x}}_N)^{\mathrm{T}} = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0})^{\mathrm{T}}$ е връх на каноничната задача

$$\text{(K)} \qquad \min z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \geq \mathbf{0}, \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Ако $\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{N}]$ и съответно $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_B, \mathbf{c}_N)^{\mathrm{T}}$, съответстващият на $\bar{\mathbf{x}}$ базисен вид на задачата (K) при базисна матрица $\mathbf{B}$ е

$$(1) \qquad z(\mathbf{x}) = \bar{c}_0 + \bar{\mathbf{c}}_N\mathbf{x}_N, \qquad \mathbf{x}_B + \mathbf{W}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \qquad \mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0},$$

където

$$(2) \qquad \mathbf{W} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}, \qquad \bar{c}_0 = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \qquad \bar{\mathbf{c}}_N = \mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{W}.$$

Числената схема на алгоритъма се реализира с помощта на *симплексни таблици* от вида на табл. 1. Симплексната таблица на даден връх $\bar{\mathbf{x}}$ съдържа съответния базисен вид (1) на задачата и координатите на $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^{\mathrm{T}}$ в първоначалния ѝ вид (K). В стълбовете $\mathcal{B}$, $\mathbf{c}_B$ и $\bar{\mathbf{x}}_B$ са нанесени съответно базисните променливи x_{j_i} (i-тото уравнение на $\mathbf{x}_B + \mathbf{W}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ е решено спрямо x_{j_i}), техните коефициенти c_{j_i} и стойности $\bar{x}_{B_i}$, $i = 1, \dots, m$.

Таблица 1

$\mathcal{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	$\dots$	x_j	$\dots$	x_q	$\dots$	x_n	$\bar{\mathbf{x}}_B$
		c_1	$\dots$	c_j	$\dots$	c_q	$\dots$	c_n	0
x_{j_1}	c_{j_1}	w_{11}	$\dots$	w_{1j}	$\dots$	w_{1q}	$\dots$	w_{1n}	$\bar{x}_{j_1}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_{j_i}	c_{j_i}	w_{i1}	$\dots$	w_{ij}	$\dots$	w_{iq}	$\dots$	w_{in}	$\bar{x}_{j_i}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_{j_p}	c_{j_p}	w_{p1}	$\dots$	w_{pj}	$\dots$	$\boxed{w_{pq}}$	$\dots$	w_{pn}	$\bar{x}_{j_p}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_{j_m}	c_{j_m}	w_{m1}	$\dots$	w_{mj}	$\dots$	w_{mq}	$\dots$	w_{mn}	$\bar{x}_{j_m}$
$\bar{\mathbf{c}}$		$\bar{c}_1$	$\dots$	$\bar{c}_j$	$\dots$	$\bar{c}_q$	$\dots$	$\bar{c}_n$	$-\bar{c}_0$

Стълбовете на x_j съдържат коефициентите пред едноименните променливи в (1). За небазисните променливи x_j това са елементите на съответния стълб на $\mathbf{W}$, а за базисните — координатите на съответния единичен вектор $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^{\mathrm{T}}$, в който $w_{ij_i} = 1$. В примерите по-долу единичните стълбове са попълнени за прегледност. В последния (индексния) ред на таблицата са нанесени относителните оценки: това са координатите $\bar{c}_j$ на $\bar{\mathbf{c}}_N$, а за базисните променливи $\bar{c}_{j_i} = 0$, $i = 1, \dots, m$. Там, където индексният ред пресича стълба $\bar{\mathbf{x}}_B$, се вписва $-\bar{c}_0$.

Една реализация на симплекс метода е следната:

1. **Проверка за оптималност на върха.** Ако $\bar{\mathbf{c}}_N \geq 0$, върхът е оптимален и задачата е решена. В противен случай се изпълнява следващата точка.

2. **Проверка за неограниченост (отдолу) на целевата функция.** Ако съществува относителна оценка $\bar{c}_j < 0$ и $\mathbf{w}_j = (\mathbf{w}_{1j}, \dots, \mathbf{w}_{mj})^{\mathrm{T}} \leq \mathbf{0}$, където $\mathbf{w}_j$ е стълбът на $\mathbf{W}$ от коефициентите пред небазисната променлива x_j, то функцията е неограничена отдолу в допустимото множество и задачата е решена. В противен случай се изпълнява следващата точка.

3. **Преход към съседен връх, при което стойността на целевата функция намалява или се запазва.** Извършва се на три етапа:

   а) *Избор на нова базисна променлива*. Избира се x_q с отрицателна относителна оценка $\bar{c}_q < 0$. Стълбът x_q в таблицата се нарича *ключов стълб*. Препоръчва се да се избира променлива с максимална по абсолютна стойност отрицателна оценка (правило на Бил).

   б) *Определяне на променливата, която излиза от базиса*. Пресмята се числото $\bar{t}$ по формулата

   $$\bar{t} = \frac{\bar{x}_{j_p}}{w_{pq}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{x}_{j_i}}{w_{iq}} : w_{iq} > 0 \right\}. \tag{3}$$

   От базиса излиза x_{j_p}. Редът с номер p се нарича *ключов ред*. *Ключовото число* w_{pq} е заградено с правоъгълна рамка.

   в) Извършва се *елементарно преобразование с ключово число* w_{pq}, т. е. попълва се симплексна таблица за новия връх $\bar{\mathbf{x}}'$, съседен на $\bar{\mathbf{x}}$:

- в стълбовете $\mathcal{B}$ и $\mathbf{c}_B$ се прави само една смяна: вместо x_{j_p} се вписва новата базисна променлива x_q, а вместо c_{j_p} — числото c_q;
- останалата част от таблицата се попълва с числата w'_{ij}, $\bar{\mathbf{x}}'_i$, $\bar{c}'_j$, $\bar{c}'_0$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, пресметнати по формулите

$$w'_{pj} = \frac{w_{pj}}{w_{pq}}, \quad w'_{ij} = w_{ij} - w_{iq}\frac{w_{pj}}{w_{pq}}, \quad i \neq p, \tag{4}$$

$$\bar{x}'_q = \frac{\bar{x}_{j_p}}{w_{pq}}, \quad \bar{x}'_{j_i} = \bar{x}_{j_i} - \frac{\bar{x}_{j_p}}{w_{pq}}w_{iq}, \quad i \neq p, \tag{5}$$

$$-\bar{c}'_0 = -\bar{c}_0 - \bar{c}_q\bar{t}, \qquad \bar{c}'_j = \bar{c}_j - \bar{c}_q\frac{w_{pj}}{w_{pq}}. \tag{6}$$

С изключение на елементите от p-тия ред, където всички числа се делят на ключовото число w_{pq}, всеки елемент на новата таблица се получава по *правилото на правоъгълника*: от съответния елемент в старата таблица w_{ij} се изважда произведението на елемента от същия ред в ключовия стълб w_{iq} с елемента от същия стълб в ключовия ред w_{pj}, разделено на ключовото число w_{pq} (вж. табл. 1). След попълването на новата симплексна таблица се преминава към стъпка 1.

При тази процедура, ако задачата е неизродена, на всяка стъпка се преминава към нов връх, в който стойността на целевата функция е по-малка. След краен брой стъпки се стига до оптимален връх или се установява неограниченост (отдолу) на функцията в допустимото множество.

При изродени задачи обаче теоретично е възможно зацикляне: минаване през различни базиси на един и същ връх. На практика вероятността за зацикляне е минимална, но се е случвала в практически задачи, решавани с компютър. Затова са разработени процедури за избягване на зацикляното. Една проста такава е разработена от Бленд.

Забележка 1. При ръчно решаване на задачата може да се контролират сметките, ако след попълването на новата таблица относителните оценки се пресмятат и по формули (2).

Забележка 2. Ако минимумът в (3) се достига на повече от едно място, новият връх ще бъде изроден: ще се анулират и други базисни променливи (освен x_{j_p}) и те ще бъдат базисни нули за него.

Забележка 3. Ако в (3) се получи $\bar{t} = 0$, т. е. $\bar{\mathbf{x}}$ е изроден и $\bar{x}_{j_p} = 0$ е негова базисна нула, то елементарното преобразование (4)–(6) не води до нов връх, а само до смяна на базиса на $\bar{\mathbf{x}}$. Сред базисите на един изроден връх обаче винаги има базис, от който чрез елементарно преобразование може да се премине към нов връх.

Пример 1. Да се реши задачата

$$z(\mathbf{x}) = 3x_1 - x_2 + 2x_3 \to \max,$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & & & = & -3, \\ x_1 & & & - & x_3 & \leq & 1, \\ x_1 & & & + & 4x_3 & \leq & 4, \end{array} \tag{7}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

Решение. Привеждаме задачата в каноничен вид

$$z_\text{K}(\mathbf{x}_\text{K}) = -3x_1 + x_2^+ - x_2^- - 2x_3 \to \min, \tag{8}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} -2x_1 & + & x_2^+ & - & x_2^- & & & & & & & = & 3, \\ x_1 & & & & & - & x_3 & + & x_4 & & & = & 1, \\ x_1 & & & & & + & 4x_3 & & & + & x_5 & = & 4, \end{array} \tag{9}$$

$$x_1, x_2^+, x_2^-, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Положили сме $x_2 = x_2^+ - x_2^-$, $x_2^+ \geq 0$, $x_2^- \geq 0$. Системата уравнения (9) е решена спрямо променливите x_2^+, x_4, x_5 и десните ѝ страни са неотрицателни, следователно $\mathbf{x}_\text{K}^{(0)} = (0, 3, 0, 0, 1, 4)^\text{T}$ е връх на каноничната задача с базис $\mathbf{B}_{\mathbf{x}_\text{K}^{(0)}} = [x_2^+, x_4, x_5]$.

Върхът $\mathbf{x}_\text{K}^{(0)}$ (табл. 2) не е оптимален: $\overline{c}_1 = -1 < 0$, $\overline{c}_3 = -2 < 0$. Не се проявява неограниченост на целевата функция — в стълбовете на x_1 и x_3 има положителни коефициенти. За нова базисна променлива е избрана x_3. Тя влиза в базиса на мястото на x_5 (само $w_{33} = 4 > 0$). След елементарно преобразование с ключово число $w_{33} = 4$, получаваме табл. 3. Новият връх е $\mathbf{x}_\text{K}^{(1)} = (0, 3, 0, 1, 2, 0)^\text{T}$ и $z_\text{K}(\mathbf{x}_\text{K}^{(1)}) = 1$. Той също не е оптимален: $\overline{c}_1 = -\frac{1}{2} < 0$.

Таблица 2

$\mathbf{x}^{(0)}$

$\mathcal{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3	x_4	x_5	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		-3	1	-1	-2	0	0	0
x_2^+	1	-2	1	-1	0	0	0	3
x_4	0	1	0	0	-1	1	0	1
x_5	0	1	0	0	$\boxed{4}$	0	1	4
$\overline{\mathbf{c}}$		-1	0	0	-2	0	0	-3

Таблица 3

$\mathbf{x}^{(1)}$

$\mathcal{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3	x_4	x_5	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		-3	1	-1	-2	0	0	0
x_2^+	1	-2	1	-1	0	0	0	3
x_4	0	$\boxed{5/4}$	0	0	0	1	$1/4$	2
x_3	-2	$1/4$	0	0	1	0	$1/4$	1
$\overline{\mathbf{c}}$		$-1/2$	0	0	0	0	$1/2$	-1

Сега в базиса влиза x_1 на мястото на x_4, защото

$$\bar{t} = \min\left[\frac{2}{\frac{5}{4}}, \frac{1}{\frac{1}{4}}\right] = \min\left(\tfrac{8}{5}, 4\right) = \tfrac{8}{5}.$$

След елементарно преобразование с ключово число $w_{21} = \frac{5}{4}$ получаваме (табл. 4) върха $\mathbf{x}_K^{(2)} = \left(\frac{8}{5}, \frac{31}{5}, 0, \frac{3}{5}, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$, който е оптимален и $z_K^* = z_K(\mathbf{x}_K^{(2)}) = \frac{1}{5}$.

Таблица 4

$\mathbf{x}^{(2)}$

$\mathcal{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3	x_4	x_5	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		-3	1	-1	-2	0	0	0
x_2^+	1	0	1	-1	0	$8/5$	$2/5$	$31/5$
x_1	-3	1	0	0	0	$4/5$	$1/5$	$8/5$
x_3	-2	0	0	0	1	$-1/5$	$1/5$	$3/5$
$\overline{\mathbf{c}}$		0	0	0	0	$2/5$	$3/5$	$-1/5$

Понеже $\overline{c}_2{}^- = 0$ и останалите елементи от стълба x_2^- са неположителни ($\mathbf{w}_2^- = (-1, 0, 0)^{\mathrm{T}} \leq \mathbf{0}$), то от върха $\mathbf{x}_K^{(2)}$ излиза неограничен ръб на допустимото множество (9), чиито точки са от вида

$$\mathbf{x}_K^{(t)} = \mathbf{x}_K^{(2)} + t(0, 1, 1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{8}{5}, \frac{31}{5} + t, t, \frac{3}{5}, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}, \qquad t \geq 0$$

и също са оптимални решения на каноничната задача. Решенията на първоначалната задача се получават от първите четири координати на $\mathbf{x}_K^{(t)}$

($x_2 = x_2^+ - x_2^-$): $\mathbf{x}^* = \left(\frac{8}{5}, \frac{31}{5}, \frac{3}{5}\right)^{\mathrm{T}}$ и $z^* = -\frac{1}{5}$. Виждаме, че решението на дадената задача е единствено, въпреки че съответната канонична задача има оптимален неограничен ръб. Затова в бъдеще няма да обръщаме внимание на тези оптимални решения на каноничната задача, защото те не водят до нови оптимални решения на дадената задача.

Пример 2. Да се реши задачата

$$z(\mathbf{x}) = -3x_1 - x_2 \to \min,$$

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\le 4, \\ -x_1 + x_2 &\ge -2, \\ 3x_1 + x_2 &\le 22, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Решение. Привеждаме задачата в каноничен вид, като предварително умножим второто ограничение с -1

$$z_{\mathrm{K}}(\mathbf{x}_{\mathrm{K}}) = -3x_1 - x_2 \to \min,$$

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 4, \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_5 &= 22, \\ x_j \ge 0,\ \mathrm{j} = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

Задачата е в базисен вид (с базис само от допълнителни променливи) спрямо върха $\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{(0)} = (0, 0, 4, 2, 22)^{\mathrm{T}}$ и $z(\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{(0)}) = 0$. В таблица 5 са последователните симплексни таблици за $\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{(0)}$, $\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{(1)} = (2, 0, 8, 0, 16)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{(2)} = \mathbf{x}_{\mathrm{K}}^* = (6, 4, 12, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $z_{\mathrm{K}}(\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{(1)}) = -6$, $z_{\mathrm{K}}^* = z(\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^*) = -22$.

Оптималното решение $\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^*$ не е единствено, понеже $\overline{c}_4 = 0$. При въвеждане на x_4 в базиса се получава (вж. последната симплексна таблица в табл. 5) оптималното решение $\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{**} = \left(\frac{18}{5}, \frac{56}{5}, 0, \frac{48}{5}, 0\right)^{\mathrm{T}}$. Други оптимални върхове няма. Тогава всички оптимални решения на каноничната задача са $\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{(\lambda)} = \lambda\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^* + (1-\lambda)\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{**} = \left(\frac{18+12\lambda}{5}, \frac{56-36\lambda}{5}, 12\lambda, \frac{48-48\lambda}{5}, 0\right)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0, 1]$. Изходната задача има оптимални решения $\mathbf{x}^{(\lambda)} = \left(\frac{18+12\lambda}{5}, \frac{56-36\lambda}{5}\right)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0, 1]$, и $z^* = -22$.

Пример 3. Да се реши задачата

$$z(\mathbf{x}) = -x_1 - x_2 - 5x_3 + 4x_4 \to \min,$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 + x_4 &= 2, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0, \\ x_j \ge 0,\ j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

Таблица 5

$\mathcal{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overline{\mathbf{x}}_B$	
		-3	-1	0	0	0	0	
x_3	0	-2	1	1	0	0	4	
x_4	0	$\boxed{1}$	-1	0	1	0	2	$\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{(0)}$
x_5	0	3	1	0	0	1	22	
$\overline{\mathbf{c}}$		-3	-1	0	0	0	0	
x_3	0	0	-1	1	2	0	8	
x_1	-3	1	-1	0	1	0	2	$\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{(1)}$
x_5	0	0	$\boxed{4}$	0	-3	1	16	
$\overline{\mathbf{c}}$		0	-4	0	3	0	6	
x_3	0	0	0	1	$\boxed{5/4}$	$1/4$	12	
x_1	-3	1	0	0	$1/4$	$1/4$	6	$\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{(2)} = \mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{*}$
x_2	-1	0	1	0	$-3/4$	$1/4$	4	
$\overline{\mathbf{c}}$		0	0	0	0	1	22	
x_4	0	0	0	$4/5$	1	$1/5$	$48/5$	
x_1	-3	1	0	$-1/5$	0	$1/5$	$18/5$	$\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{**}$
x_2	-1	0	1	$3/5$	0	$2/5$	$56/5$	
$\overline{\mathbf{c}}$		0	0	0	0	1	22	

Решение. Дадената задача е в каноничен вид с очевиден начален базис $[x_1, x_2]$, на който отговаря изроден връх $\mathbf{x}^{(0)} = (2, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Симплексните

Таблица 6

$\mathcal{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\overline{\mathbf{x}}_B$	
		-1	-1	-5	4	0	
x_1	-1	1	0	3	1	2	
x_2	-1	0	1	$\boxed{1}$	-2	0	$\mathbf{x}^{(0)}$
$\overline{\mathbf{c}}$		0	0	-1	3	2	
x_1	-1	1	-3	0	7	2	
x_3	-5	0	1	1	-2	0	$\mathbf{x}^{(0)}$
$\overline{\mathbf{c}}$		0	1	0	1	2	

таблици за решаване на задачата са дадени в таблица 6. Те съдържат базисния вид на задачата спрямо два базиса на този изроден връх. Критерият за оптималност се проявява само при втория базис. Оптималната стойност на целевата функция е $z^* = -2$.

Задачи

Да се решат чрез симплекс метода дадените задачи. От симплексната таблица на последния връх $\bar{\mathbf{x}}$ да се определи:

а) ако $\bar{\mathbf{x}}$ е оптимален, дали е единствено оптимално решение и ако не е, да се намерят всички съседни оптимални върхове, а също и оптималните решения (ако има такива), които лежат върху неограничени ръбове, излизащи от $\bar{\mathbf{x}}$; да се напише общият вид на допустимите вектори, за които от получената информация следва, че са оптимални решения на задачата;

б) общият вид на точките, лежащи върху неограничените ръбове, излизащи от $\bar{\mathbf{x}}$, по които $z(\mathbf{x})$ расте или намалява неограничено (в зависимост от критерия).

1. $z(\mathbf{x}) = 3 - x_4 - x_5 \to \min,$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + x_4 + x_5 &= 2, \\ x_2 \quad + 2x_4 + 3x_5 &= 7, \\ x_3 - x_4 - 3x_5 &= 2, \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

2. $z(\mathbf{x}) = 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 - x_6 \to \max,$

$$\begin{aligned} - x_2 + x_3 + x_4 - 6x_5 \qquad &= 5, \\ x_1 + x_2 \qquad + x_4 + x_5 - x_6 &= 3, \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

3. $z(\mathbf{x}) = 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 - 12x_5 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 - 5x_5 &= 7, \\ x_2 + x_3 - 3x_4 - 2x_5 &= 2, \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

4. Зад. 3, но при целева функция $z(\mathbf{x}) = 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 5x_4 - 12x_5$.

5. $z(\mathbf{x}) = x_2 - x_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} -x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 &= -2, \\ x_2 - x_3 &\geq 1, \\ 3x_2 + x_3 &\leq 5, \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 4. \end{aligned}$$

6. $z(\mathbf{x}) = 2x_1 - x_3 + 3x_4 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_4 &= 2, \\ 16x_2 + x_3 - 2x_4 &= 8, \\ 5x_2 &\leq 3, \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 4. \end{aligned}$$

7. $z(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 &= 4, \\ 0 \leq x_1 \leq 3,&\ 0 \leq x_2 \leq 3, \\ 0 \leq x_3 \leq 7,&\ 0 \leq x_4. \end{aligned}$$

8. $z(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &\leq 2, \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 4, \\ 2x_1 + 6x_2 &\leq 6, \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

9. $z(\mathbf{x}) = 9x_1 + 14x_2 + 5x_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} 9x_1 + 4x_2 + 4x_3 &\leq 54, \\ 9x_1 + 5x_2 + 5x_3 &\leq 63, \\ 0 \leq x_2 \leq 5,\ x_1 \geq 0,&\ x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Отговори и решения

1. $z^* = 1$. При влизане на x_4 в базиса оптимално решение е $\mathbf{x}^* = (0, 3, 4, 2, 0)^{\mathrm{T}}$. При влизане на x_5 в базиса оптимално решение е $\mathbf{x}^{**} = (0, 1, 8, 0, 2)^{\mathrm{T}}$. Всички оптимални решения са $\mathbf{x}_\lambda = \lambda\mathbf{x}^* + (1-\lambda)\mathbf{x}^{**} = (0, 2\lambda+1, 8-4\lambda, 2\lambda, 2-2\lambda)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0, 1]$.

2. От $\overline{\mathbf{x}} = (3, 0, 5, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ излиза неограничен ръб $\mathbf{x}_t = (3 + t, 0, 5, 0, 0, t)^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$; $z(\mathbf{x}_t) = 50 + 4t \xrightarrow[t\to\infty]{} +\infty$.

3. $\overline{\mathbf{x}} = (7, 0, 2, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ е оптимално решение, $z^* = 16$. Оптимални неограничени ръбове ($\overline{c}_4 = 0$) $\mathbf{x}_t = (7 + t, 0, 2 + 3t, t, 0)^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$, с направляващ вектор $\mathbf{p} = (1, 0, 3, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ и ($\overline{c}_5 = 0$) $\mathbf{x}_r = (7 + 5r, 0, 2 + 2r, 0, r)^{\mathrm{T}}$, $r \geq 0$, с направляващ вектор $\mathbf{q} = (5, 0, 2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$. Всички оптимални решения са $\mathbf{x}_\mu = \overline{\mathbf{x}} + \mu_1\mathbf{p} + \mu_2\mathbf{q} = (7 + \mu_1 + 5\mu_2, 0, 2 + 3\mu_1 + 2\mu_2, \mu_1, \mu_2)^{\mathrm{T}}$, $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$.

4. $\overline{\mathbf{x}} = (7, 0, 2, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ е оптимално решение, $z^* = 16$. Неограничени ръбове ($\overline{c}_4 = 0$) $\mathbf{x}_t$ и ($\overline{c}_5 = 0$) $\mathbf{x}_r$ от вида в задача 3. $\overline{\mathbf{x}}$ има съседен оптимален връх ($\overline{c}_2 = 0$) $\overline{\mathbf{y}} = (3, 2, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Оптимални решения са $\mathbf{x}_{\lambda\mu} = \lambda\overline{\mathbf{x}} + (1-\lambda)\overline{\mathbf{y}} + \mu_1\mathbf{p} + \mu_2\mathbf{q} = (3+4\lambda+\mu_1+5\mu_2, 2-2\lambda, 2\lambda+3\mu_1+2\mu_2, \mu_1, \mu_2)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0, 1]$, $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$ (това не са всички решения — от $\overline{\mathbf{y}}$ също излиза неограничен оптимален ръб).

5. $z^* = \frac{5}{3}$, $\mathbf{x}^* = \left(\frac{17}{6}, \frac{5}{3}, 0\right)^{\mathrm{T}}$.

6. $z^* = 0$, $\mathbf{x}^* = \left(0, \frac{1}{2}, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$.

7. $z^* = 6$, $\mathbf{x}^* = (3, 3, 1, 1)^{\mathrm{T}}$.

8. $z^* = 3$, $\mathbf{x}^* = (3, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

9. $z^* = 108$, $\mathbf{x}^* = (2, 5, 4)^{\mathrm{T}}$.