

Цифрова обработка на сигнали

Тема #5

Теорема на дискретизацията





Съдържание

Предистория и етимология

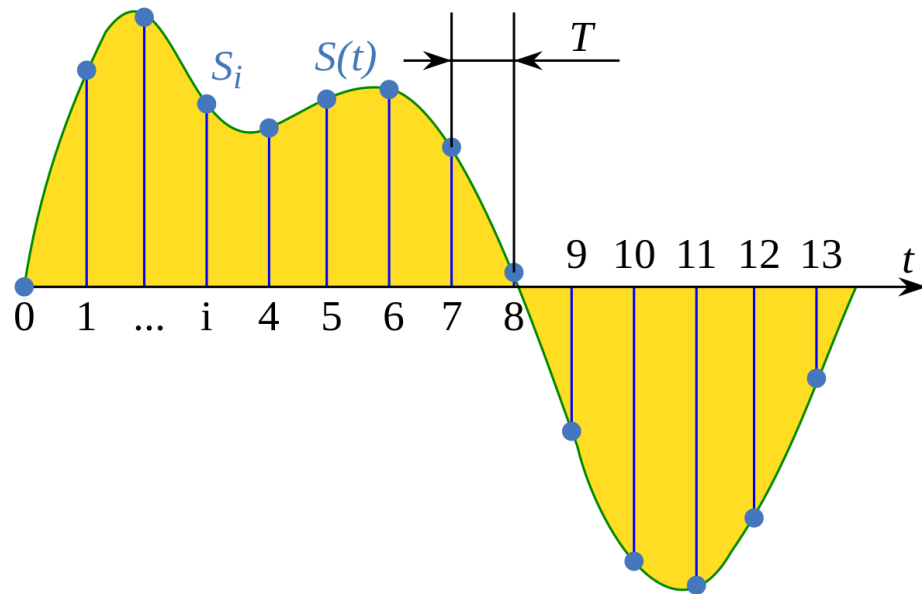
Връзка между спектъра на непрекъснат във времето сигнал и спектъра на дискретизирания сигнал

Теорема на дискретизацията, възстановяване на непрекъснат сигнал от дискретен сигнал

Предистория и етимология

Теоремата на дискретизацията
(ако основна теорема на
теорията на интерполацията)
се състои от две части:

- първата твърди, че функция с крайна честотна лента е напълно определена от нейните отчети, и
- втората описва как да се възстанови първоначалната функция използвайки тези отчети.





Предистория и етимология

Исторически теоремата на дискретизацията е преоткривана многократно от различни автори работещи в областта на теория на информацията и теория на интерполацията.

- Първата част на теоремата е формулирана от Borel през 1897.
- Двете части на теоремата на дискретизацията са формулирани от Е.Т. Whittaker през 1915 г и от J.M. Whittaker 1935 г в различни варианти.
- Котелников публикува теоремата на дискретизацията през 1933.
- Küpfmüller доказва теоремата в 1939 г.
- Gabor публикува теоремата през 1946 г.
- Shannon публикува доказателство на теоремата през 1949 г.



Предистория и етимология

В литературата различни автори именуват теоремата на дискретизацията като

- правило на Nyquist*,
- теорема на Shannon,
- теорема на Nyquist–Shannon,
- теорема на Nyquist–Shannon–Kotelnikov,
- теорема на Whittaker–Shannon–Kotelnikov,
- теорема на Whittaker–Nyquist–Kotelnikov–Shannon,

Всъщност, Nyquist не е разглеждал проблема за дискретизация и възстановяване на непрекъснати сигнали*, но по една или друга причина друг автор от Bell Labs свързва неговото име с теоремата на дискретизацията.

*През 1928 Nyquist показва, че максимум $2B$ независими отчета могат да бъдат изпратени по канал за връзка с честотна лента B .

Симетрия на време-честотните преобразувания

Времева област

Непрекъснат (аналогов) сигнал

Непериодичен сигнал

Дискретен сигнал (ред)

Периодичен сигнал

Честотна област

Непериодичен спектър

Непрекъснат спектър

Периодичен спектър

Дискретен спектър

Тема #5



Предистория и етимология

Връзка между спектъра на непрекъснат във времето сигнал и спектъра на дискретизирания сигнал

Теорема на дискретизацията, възстановяване на непрекъснат сигнал от дискретен сигнал

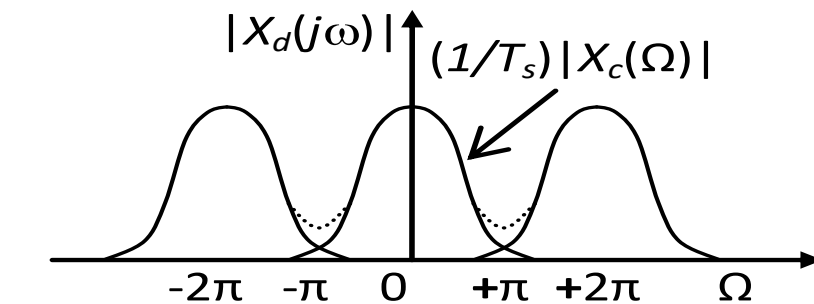
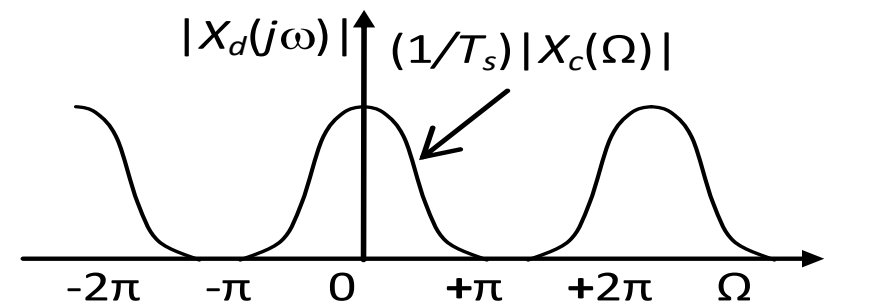
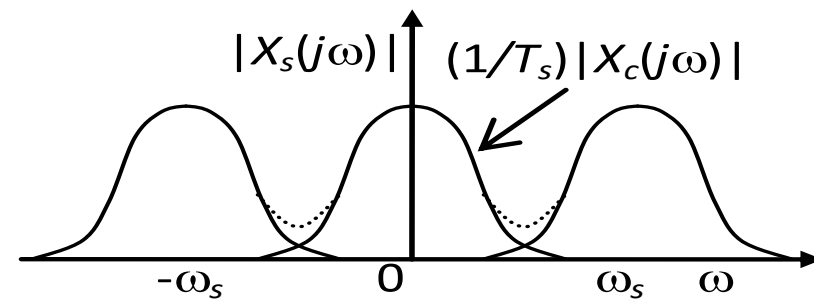
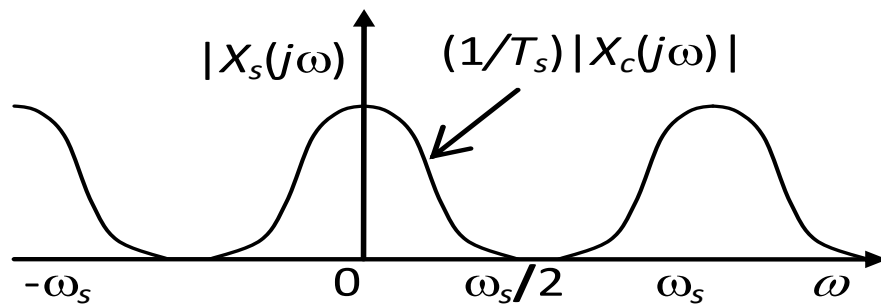
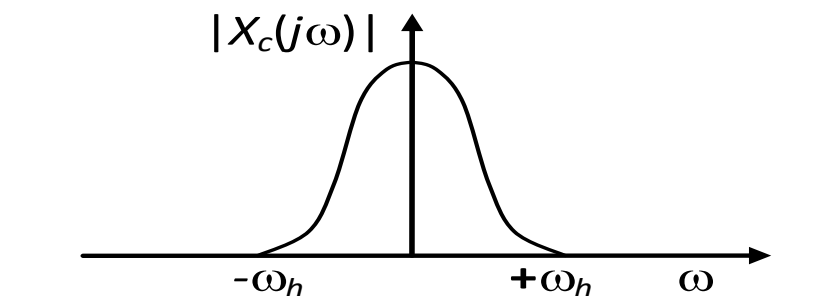
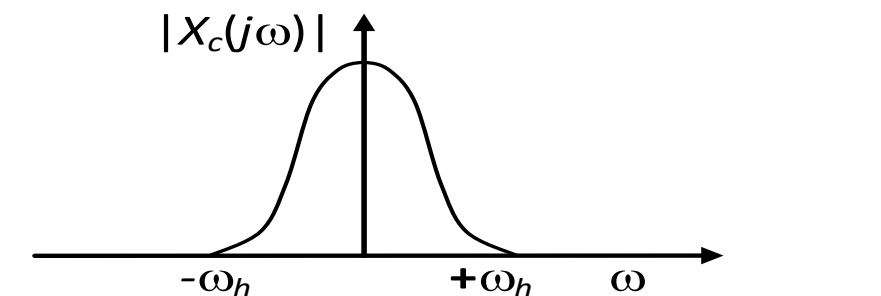
Връзка между спектъра на непрекъснат във времето сигнал и спектъра на дискретизирания сигнал

$$X_d(j\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega + j2\pi r)$$

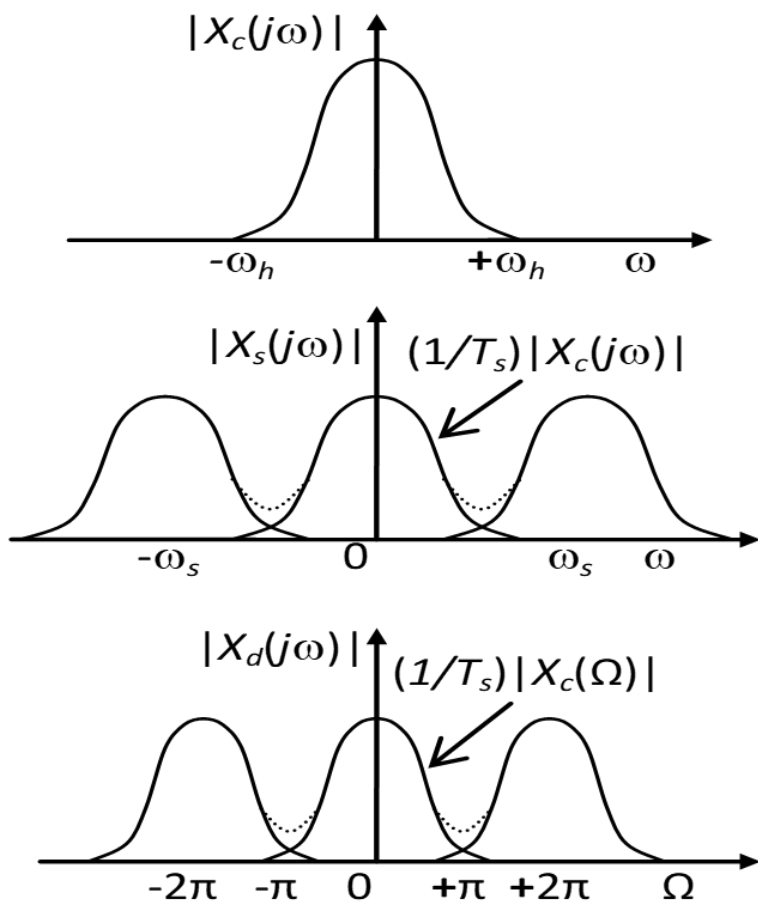
представлява връзката между спектъра, $X_d(j\Omega)$, на редицата $x(n)$ и спектъра, $X_c(j\omega)$, на съответния непрекъснат сигнал.

Този резултат показва че спектърът, $X_d(j\Omega)$, на редицата $x(n)$ е сумата от мащабираните по амплитуда и нормирани по честота спектри $X_c(j\Omega)$ на непрекъснатия сигнал, разположени с период 2π по протежение на честотната ос Ω .

Връзка между спектъра на непрекъснат във времето сигнал и спектъра на дискретизирания сигнал

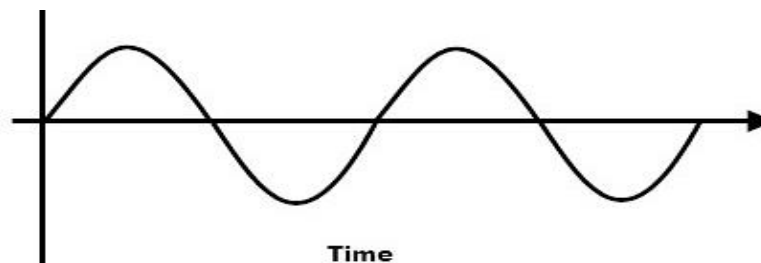


Връзка между спектъра на непрекъснат във времето сигнал и спектъра на дискретизирания сигнал

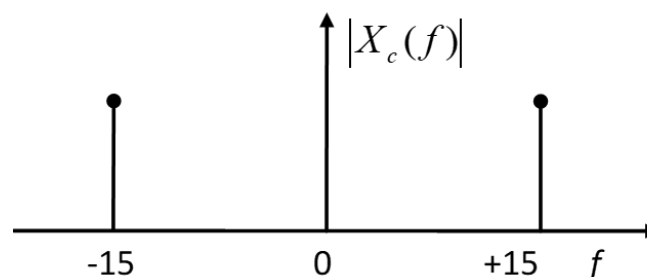


При неправилен избор на честотата на дискретизация, т.е. при $\omega_s < 2\omega_h$ спектрите от съседните ленти се припокриват и наслагват, което се проявява като появяване на нови честотни съставляващи в основната честотна лента $[0, f_s/2]$.

Пример:



Имаме аналогов периодичен сигнал, синусоида с честота 15 Hz,



Избрали сме честота на дискретизация $f_s = 20$ Hz.

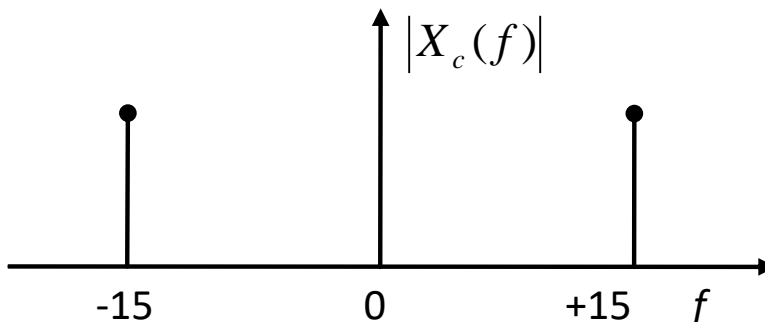
Тъй като спектъра на дискретния сигнал е периодичен
получаваме: $0 f_s \pm 15$ Hz, $1f_s \pm 15$ Hz, $2f_s \pm 15$ Hz, ...

т.е. честотните съставлящи в интервала $[0, 20$ Hz] ще са две:
 $\{0+15=15$ Hz, $20-15=5$ Hz $\}$.

В основната честотна лента $[0, f_s/2]$ се появи допълнителна
съставляща, с честота 5 Hz.

Пример:

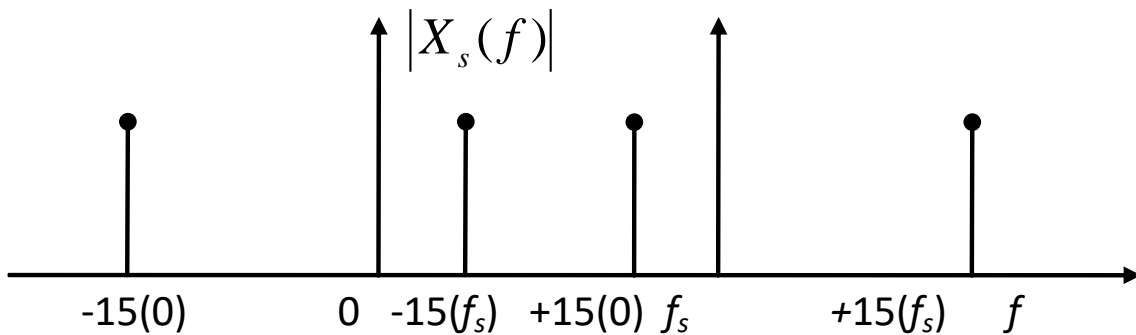
Първоначалният сигнал е с честота 15 Hz !



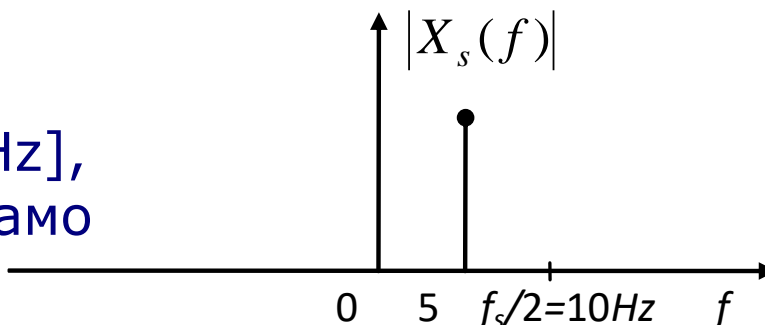
Дискретизиране с $f_s = 20$ Hz.

Понеже дискретният сигнал има периодичен спектър, изчисляваме:

- 0. $f_s \pm 15$ Hz,
- 1. $f_s \pm 15$ Hz,
- 2. $f_s \pm 15$ Hz, ...



В интервала $[0, f_s/2 = 10 \text{ Hz}]$, честотната съставяща е само една --> 5 Hz, което е **погрешен резултат**.





Тема #5

Предистория и етимология

Връзка между спектъра на непрекъснат във времето сигнал и спектъра на дискретизирания сигнал

Теорема на дискретизацията, възстановяване на непрекъснат сигнал от дискретен сигнал



Теорема на дискретизацията, възстановяване на непрекъснат сигнал от дискретен сигнал

Основавайки се на наблюденията ни до този момент можем да направим следният извод за същността на теоремата на дискретизацията:

Ако непрекъснат сигнал, $x(t)$, които има спектър $X_c(j\omega)$ с ограничена честотна лента $\pm\omega_h$,

бъде дискретизиран с честота на дискретизация $\omega_s > 2\omega_h$,

то сигналът $x(t)$ може да бъде възстановен напълно от дискретния сигнал $x(nTs)$.

В литературата $\omega_s/2$ (или $fs/2$) често се нарича честота на Nyquist.



Теорема на дискретизацията, възстановяване на непрекъснат сигнал от дискретен сигнал

Възстановяването на непрекъснатия сигнал, $x(t)$, от дискретния сигнал $x(nT_s)$ се извършва с помощта на идеален нискочестотен филтър с коефициент на предаване $|H_r(j\omega)| = T_s$ и с гранична честота на лентата на пропускане ω_c удовлетворяваща условието:

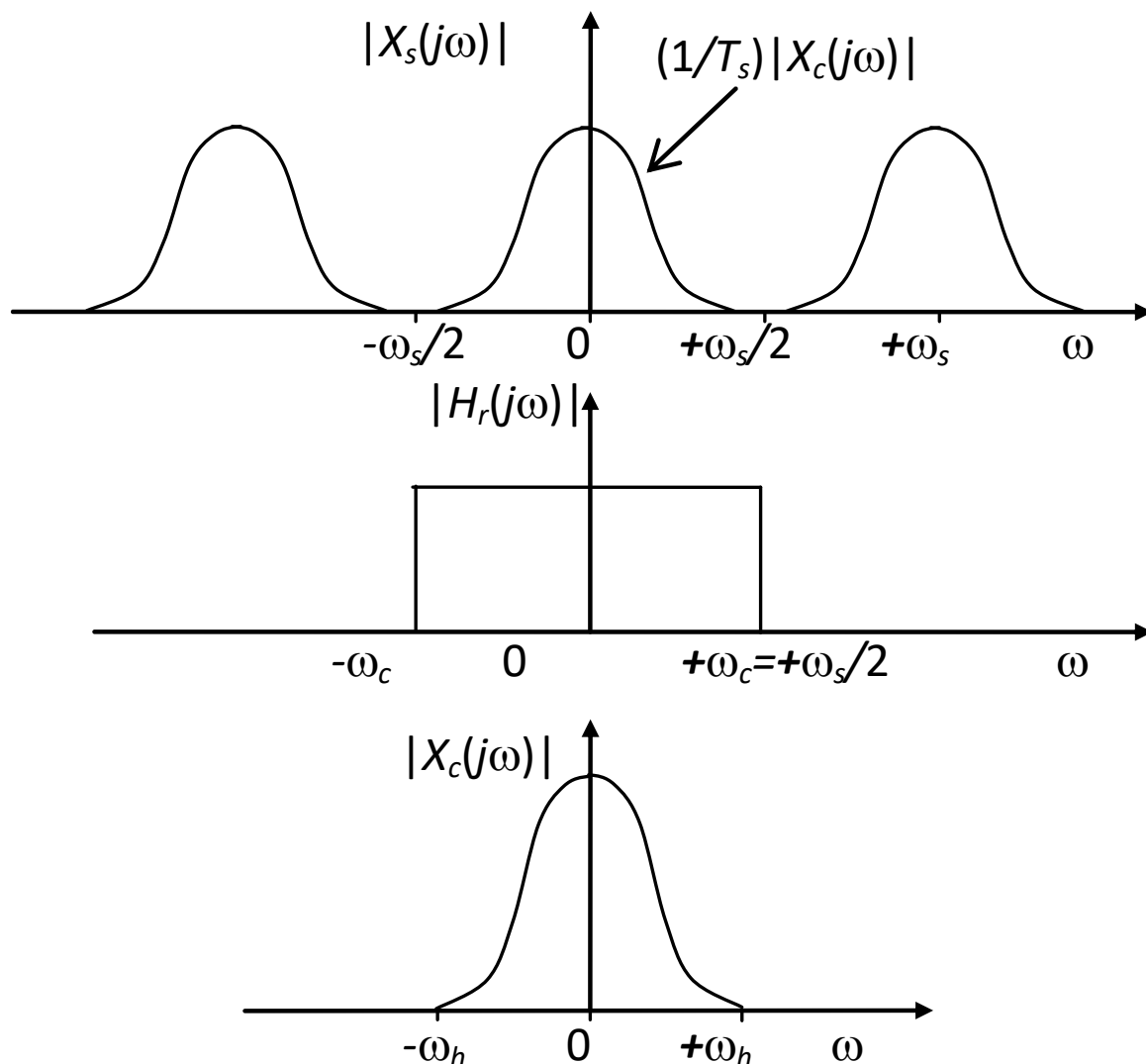
$$\omega_h \leq \omega_c \leq \omega_s - \omega_h$$

Процесът на възстановяване на непрекъснатия сигнал, $x(t)$, от дискретния сигнал $x(nT_s)$, т.е. филтрацията с НЧФ, се представя като

$$X_c(j\omega) = H_r(j\omega)X_s(j\omega)$$

$$x(t) = x(nT_s) * h_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) h_r(t - nT_s)$$

Пример за случая $\omega_c = \omega_s/2$



Теорема на дискретизацията, възстановяване на непрекъснат сигнал от дискретен сигнал

От дефиницията за филтрация

$$x(t) = x(nT_s) * h_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) h_r(t - nT_s)$$

$$X_c(j\omega) = H_r(j\omega)X_s(j\omega)$$

можем да отбележим, че импулсната характеристика на идеалния НЧФ е

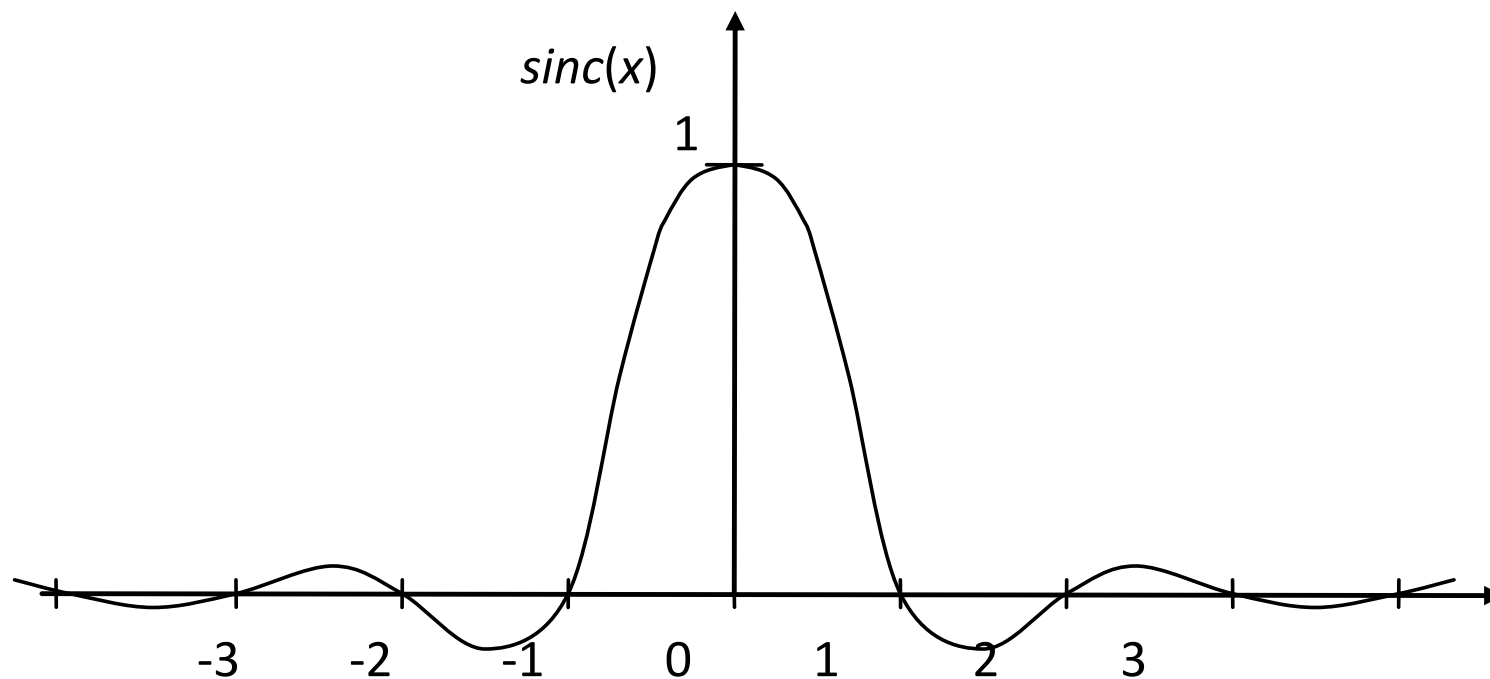
$$h_r(t) = F^{-1}\{H_r(j\omega)\}$$

$$h_r(t) = T_s \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right)$$

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

където

Теорема на дискретизацията, възстановяване на непрекъснат сигнал от дискретен сигнал



Теорема на дискретизацията, възстановяване на непрекъснат сигнал от дискретен сигнал

След заместването на

$$h_r(t) = T_s \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right)$$

в израза за филтрацията, т.е. сумата на конволюцията м/у сигнала и импулсната х-ка на идеален НЧФ

$$x(t) = x(nT_s) * h_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) h_r(t - nT_s)$$

получаваме

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) T_s \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left[\frac{\omega_c (t - nT_s)}{\pi}\right]$$



Теорема на дискретизацията, възстановяване на непрекъснат сигнал от дискретен сигнал

Идеалният НЧФ не може да бъде реализиран физически, поради две причини:

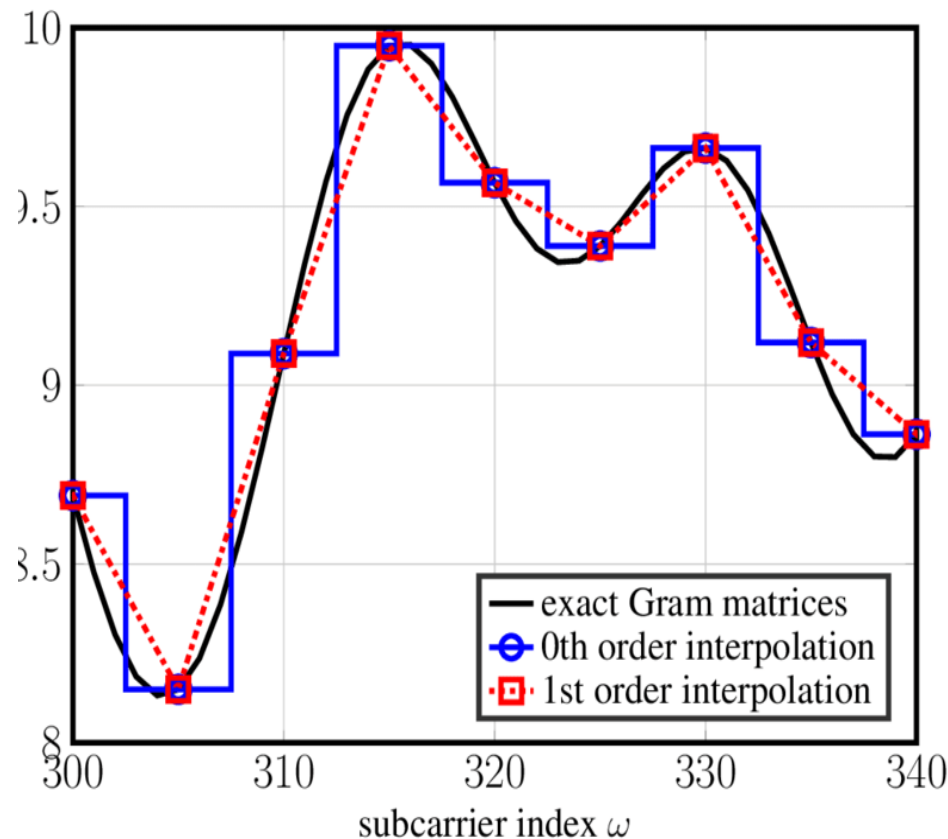
- 1) $\text{sinc}(\cdot)$ функцията е с безкрайна дължина, при което сумата на конволюцията не е сходимая и изчисленията не могат да завършат. Затова $\text{sinc}(\cdot)$ функцията обикновено се апроксимира с краен брой членове, но пък това води до отстъпление от идеалния НЧФ.
- 2) Импулсната характеристика на НЧФ не е каузална редица, т.е. $h(n) \neq 0$ за $n < 0$ и следователно изчисляването на сумата на конволюцията изисква (по принцип безкраен брой) бъдещи стойности на входния сигнал $x(n)$.

Теорема на дискретизацията, възстановяване на непрекъснат сигнал от дискретен сигнал

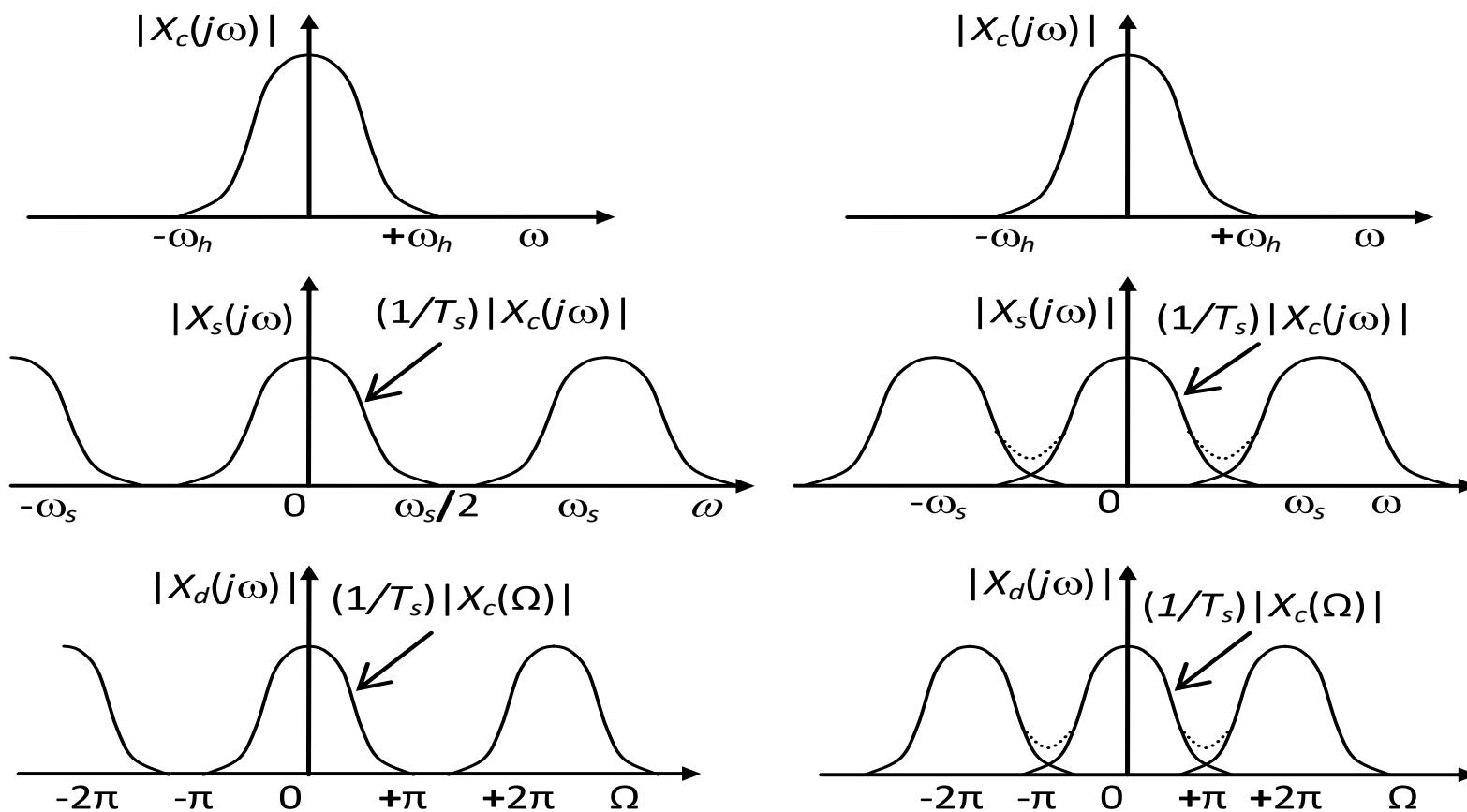


Поради това в практиката се използват различни интерполатори на сигнала:

- Екстраполаторът е интерполатор от нулев ред, чиито изход "помни" стойността на последния отчет за един интервал на дискретизация.
- Интерполаторът от първи ред формира на изхода си сигнал между всеки два отчета, който е средната стойност на тези два отчета.
- Интерполаторите от втори, трети, и т.н. ред използват квадратична крива, кубична крива, или криви от по-висок ред.



Примерът, който разгледахме е математическа идеализация.
Реалните сигнали имат безкраен спектър...



Теорема на дискретизацията, възстановяване на непрекъснат сигнал от дискретен сигнал



Поради това, явлението "наслагване на спектрите" не може да бъде избягнато изцяло, даже при произволно високи честоти на дискретизация.

Заедно с това, при реалните сигнали мощността на спектъра над определена честота става пренебрежимо малка и тази честота може да се разглежда като гранична честота на спектъра, ω_h .

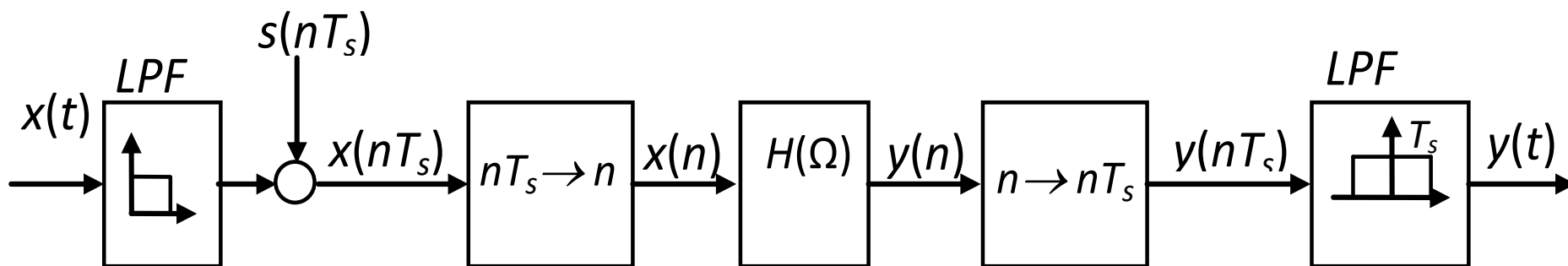
В практиката ω_h се определя от условието 95%, 97% или 99% от мощността на сигнала да попада в тази честотна лента.

Изборът на ω_h е компромис между стремежа да се избере максимално широка лента за анализ на сигнала и необходимостта да се избегне влиянието на лъжливи честотни съставлящи от съседните копия на спектъра.

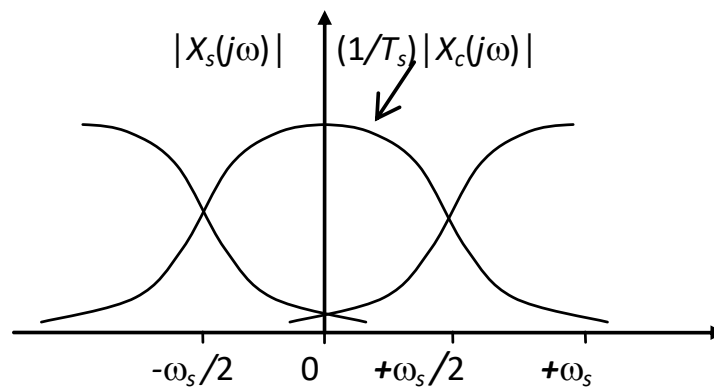
Теорема на дискретизацията, възстановяване на непрекъснат сигнал от дискретен сигнал



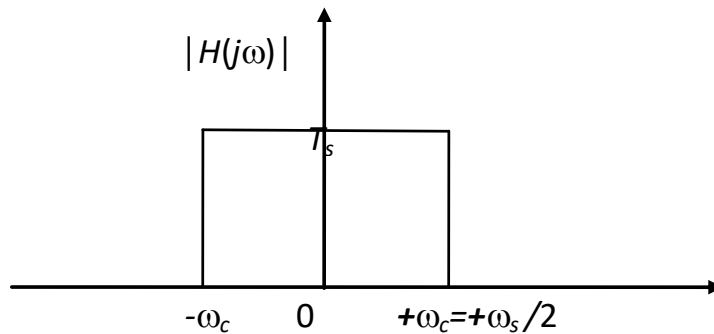
За намаляване на ефекта от наслагване на спектрите, в системите за ЦОС на аналогови сигнали се поставят входни НЧФ, които ограничават честотната лента на входният сигнал до честота по-малка от половината на честотата на дискретизация.



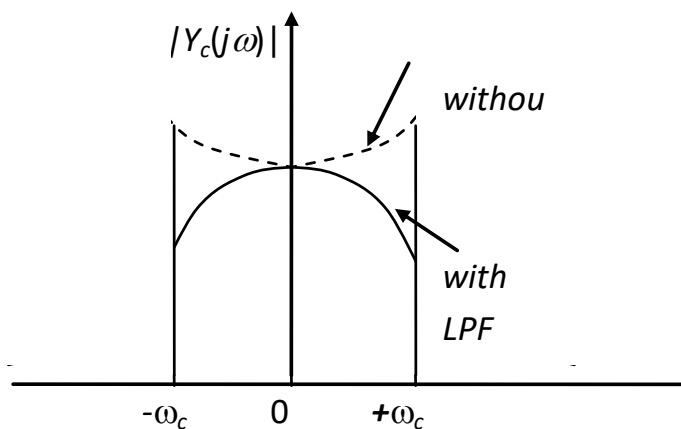
Пример



a)



b)



Възможни въпроси за изпита

- Обяснете в какво се изразява наслагването на спектрите и защо се проявява?
- Може ли да се избегне наслагването на спектрите? Как?
- Какво представлява идеалният НЧФ и защо не може да бъде реализиран физически?
- Какъв спектър ще се получи при дискретизирането на непрекъснат синусоудален сигнал $x(t) = \sin(2\pi f_1 t)$, когато честотата на дискретизация е $f_s = f_1$?

Цифрова обработка на сигнали

Тема #6

Кратковременен спектрален анализ

