

Цифрова обработка на сигнали

Тема #7

***Време-мащабен анализ на сигналите.
Уейвлет (wavelet) преобразуване.***



Съдържание

- Дефиниране на проблема → времечестотен анализ чрез преобразуване на Габор и кратковременно преобразуване на Фурие
- Исторически сведения за уейвлетс (wavelets) и уейвлет преобразуванията
- Време-честотен анализ → сравнение между кратковременното преобразуване на Фурие и уейвлет преобразуванията
- Уейвлет преобразуване за непрекъснати сигнали
- Уейвлет преобразуване за за дискретни сигнали

Дефиниране на проблема

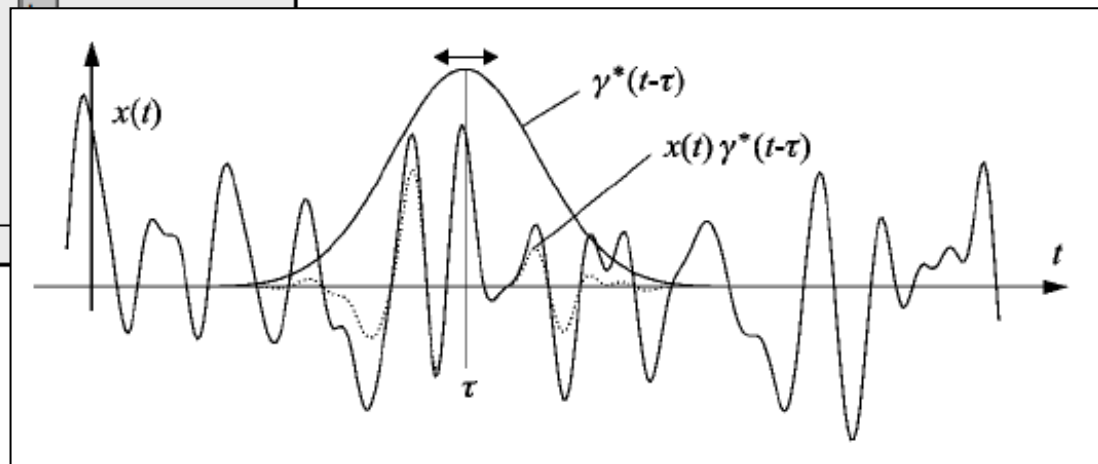
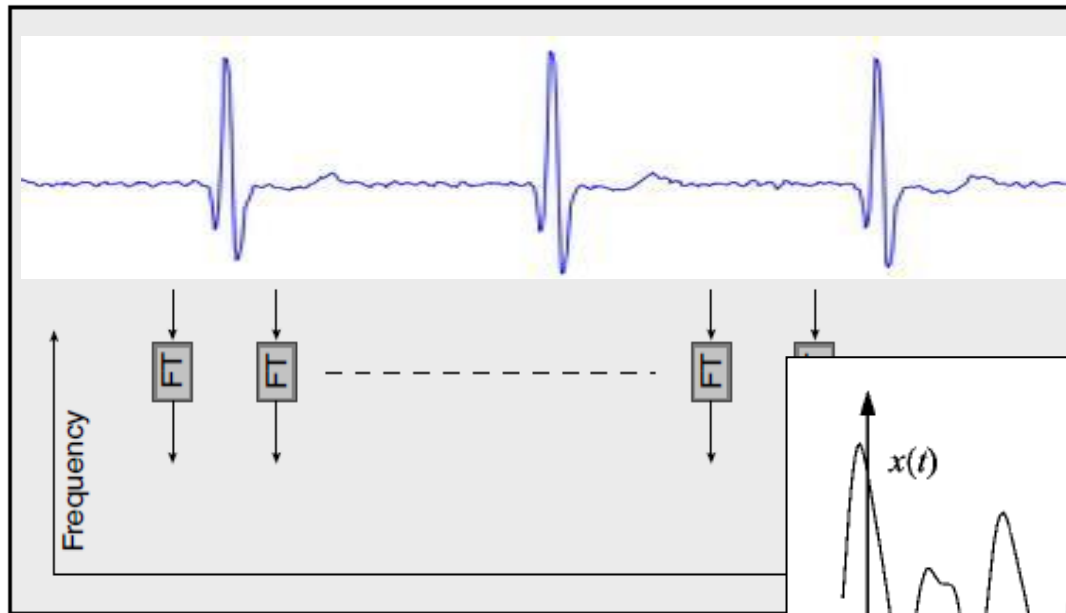
Основният проблем при анализа на реални сигнали е да се получи информация за честотния състав на сигнала във всеки отделен момент от времето и да се локализируют събития във времето.



Това обаче не е възможно с традиционното преобразуване на Фурие, тъй като то представя съвкупния спектър на целия сигнал, без възможност за локализация във времето.

Време-честотен анализ = Динамичен спектър!

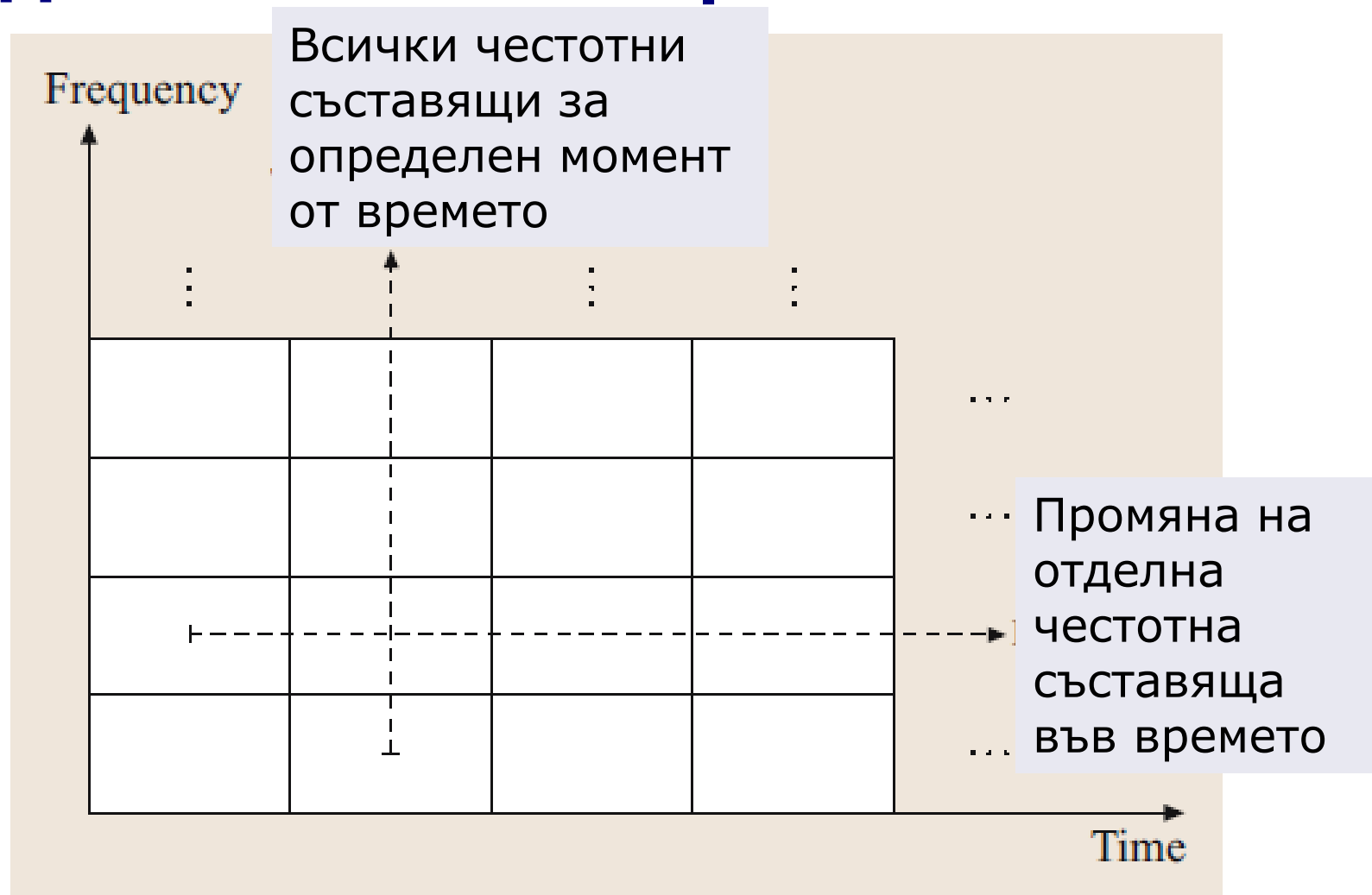
Преобразуванието на Габор (Denis Gabor) и кратковременното преобразувание на Фурие (Joseph Fourier) предлагат само частично решение.



Name	Definition
Rectangle	$w(t) = \begin{cases} b & \text{if } (t \leq a) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$
Bartlett (triangle)	$w(t) = \begin{cases} \frac{b}{a}t + b & \text{if } -a \leq t \leq 0, \\ -\frac{b}{a}t + b & \text{if } 0 \leq t \leq a, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$
Hanning (von Hann)	$w(t) = \begin{cases} b \cos^2\left(\frac{\pi t}{2a}\right) & \text{if } t \leq a \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$
Hamming	$w(t) = \begin{cases} 0.54b + 0.46b \cos\left(\frac{\pi t}{a}\right) & \text{if } t \leq a \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$
Blackman	$w(t) = \begin{cases} 0.42b + 0.5b \cos\left(\frac{\pi t}{a}\right) + 0.08b \cos\left(\frac{2\pi t}{a}\right) & \text{if } t \leq a \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$

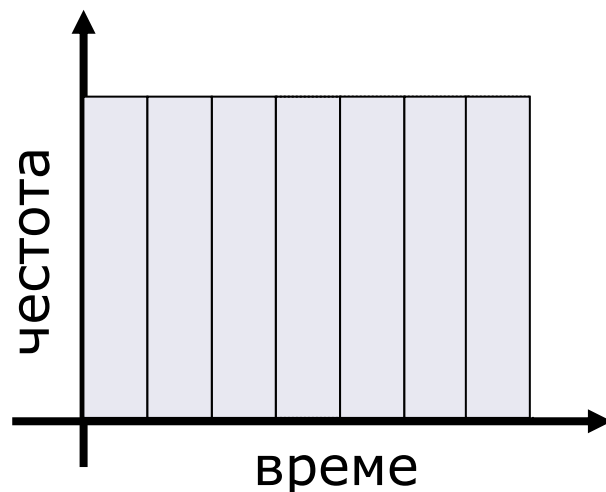
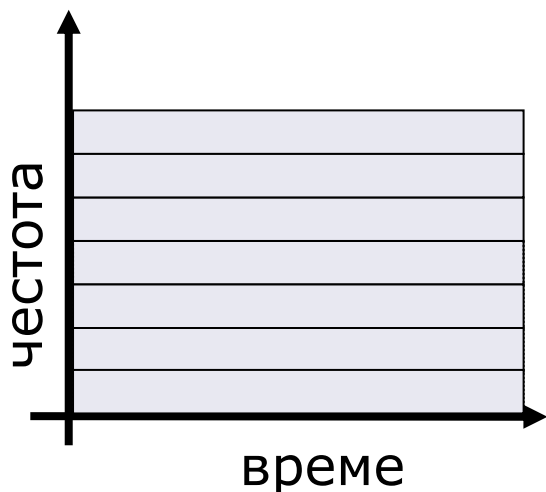
^aAdjust parameter $a > 0$ for a window width appropriate to the signal features of interest. Adjust parameter $b > 0$ in order to normalize the window function.

Време-честотен анализ = Динамичен спектър!



Време-честотен анализ = Динамичен спектър!

Дължината на времевия прозорец, ограничава разделителната способност по честота



Gabor дефинира горна граница за точността на едновременна локализация на сигнал в честотната и във времевата област.

$$\Delta t \Delta f \cong 1$$

Теорема на Benedicks: Не е възможно едновременно дадена функция и нейното Фурие преобразуване да са ограничени (крайни).

Съдържание

- Дефиниране на проблема → времечестотен анализ чрез преобразуване на Габор и кратковременно преобразуване на Фурие
- Исторически сведения за уейвлетс (wavelets) и уейвлет преобразуванията
- Време-честотен анализ → сравнение между кратковременното преобразуване на Фурие и уейвлет преобразуванията
- Уейвлет преобразуване за непрекъснати сигнали
- Уейвлет преобразуване за дискретни сигнали



Кратка история на появата на уейвлетс

1909 – Haar, първото семейство уейвлет функции.

1947 – Gabor, атоми на Габор

1981 – Morlet, дефинира концепцията на уейвлетс

1984 – Morlet и Grossman, термина "wavelet".

1985 – Meyer, ортогонални уейвлетс.

1988 – Mallat & Meyer, "multi-resolution".

1988 – Daubechies, компактна поддръжка на ортогонални уейвлетс.

1989 – Mallat, бързо уейвлет преобразуване, "fast wavelet transform"

1989 –

Alfréd Haar



Denis Gabor



Jean Morlet



Yves Meyer



Stephane Mallat



Ingrid Daubechies



Съдържание на Тема #6

- Дефиниране на проблема → времечестотен анализ чрез преобразуване на Габор и кратковременно преобразуване на Фурие
- Исторически сведения за уейвлетс (wavelets) и уейвлет преобразуванията
- Време-честотен анализ → сравнение между кратковременното преобразуване на Фурие и уейвлет преобразуванията
- Уейвлет преобразуване за непрекъснати сигнали
- Уейвлет преобразуване за дискретни сигнали

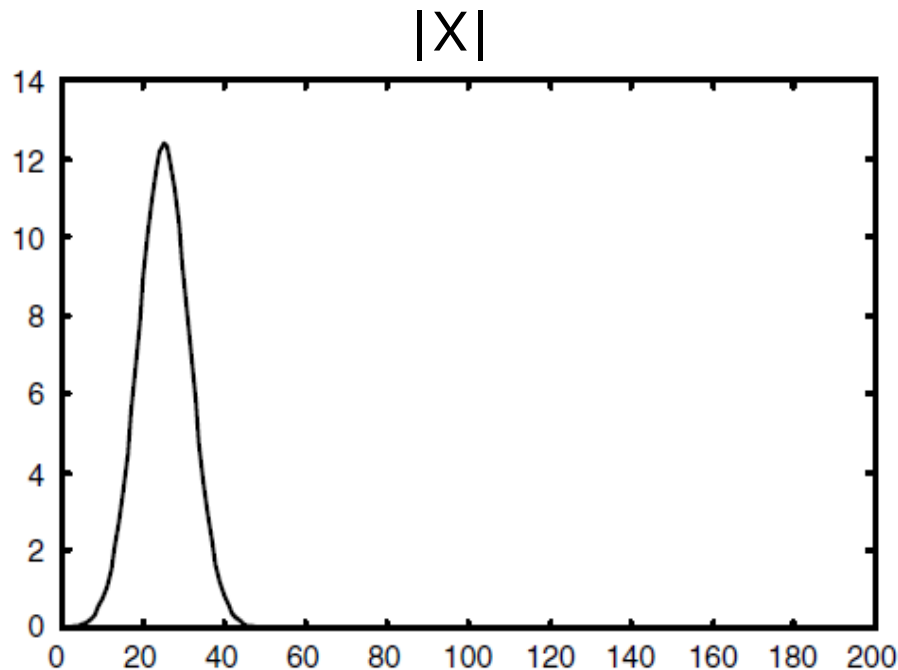
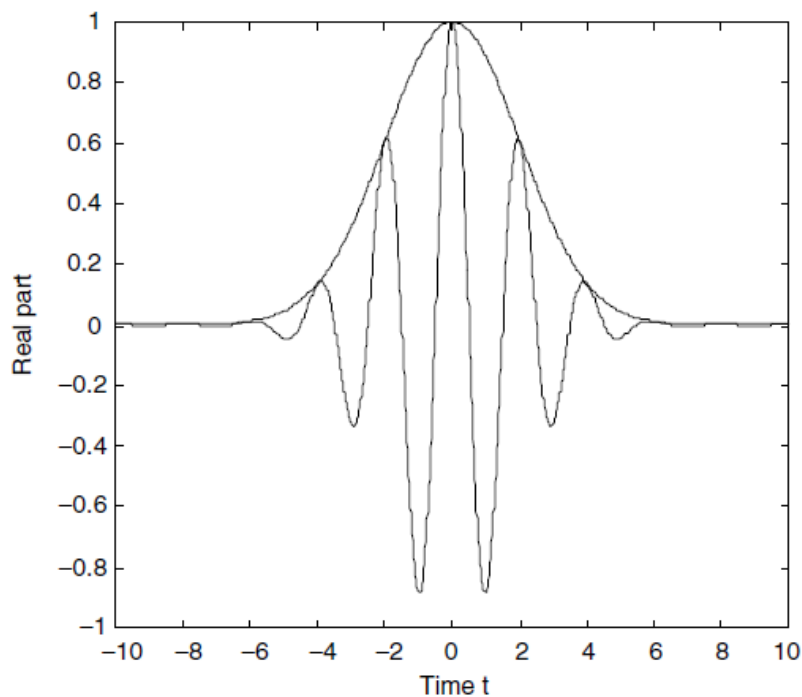
Време-честота и отместване-мащаб, STFT и WT



Преобразуване на Gabor

време-честотен
атом на Gabor

$$G_x(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(\tau-t)^2} e^{-j2\pi f\tau} x(\tau) d\tau$$

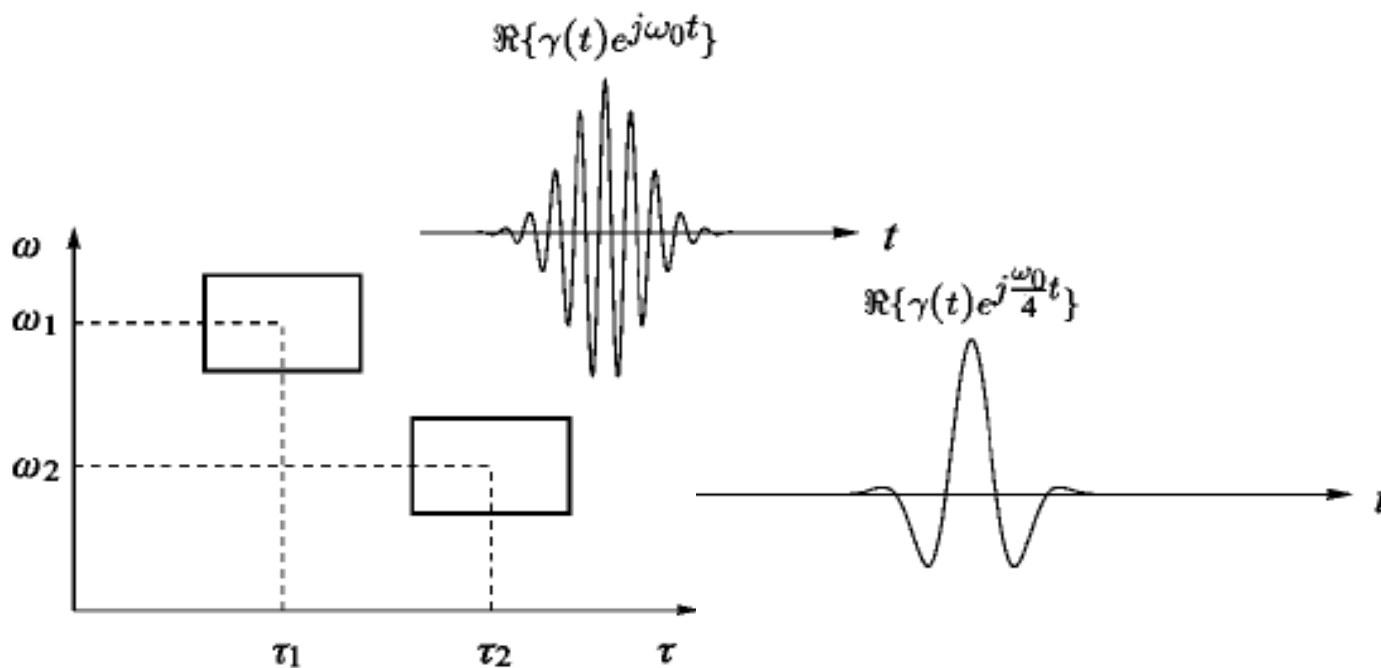


Време-честота и отместване-мащаб, STFT и WT



Кратковременно преобразуване на Фурие, STFT

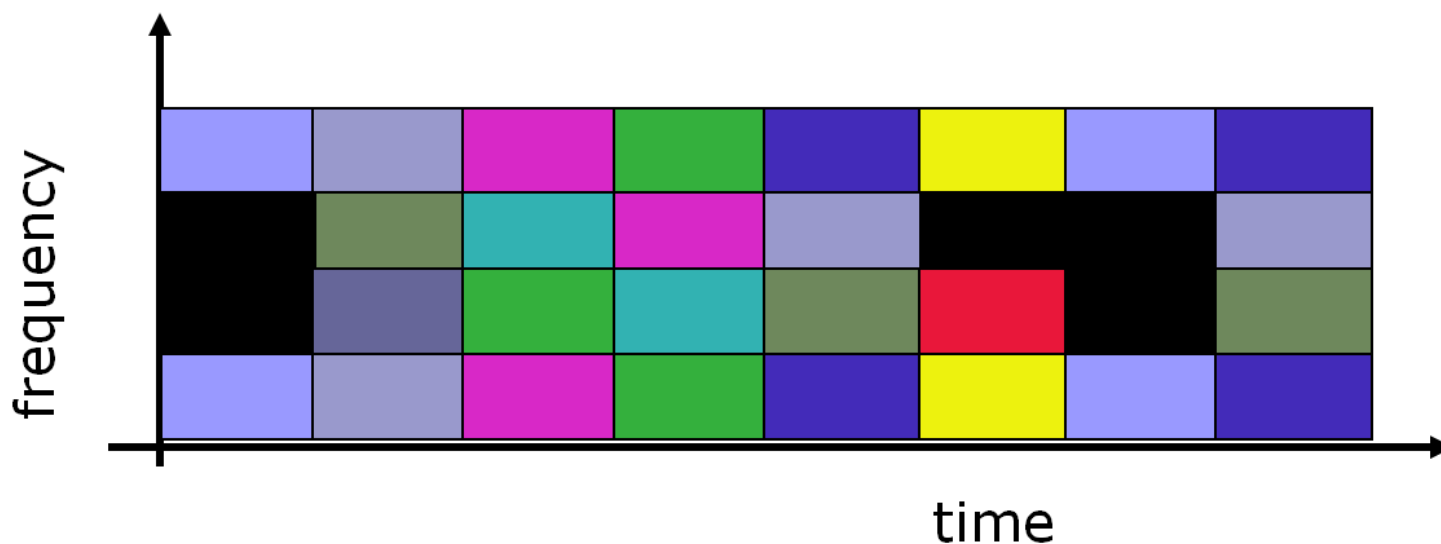
$$X_{ST}(j\omega_0, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) e^{-j\omega_0 t} x(t) dt$$



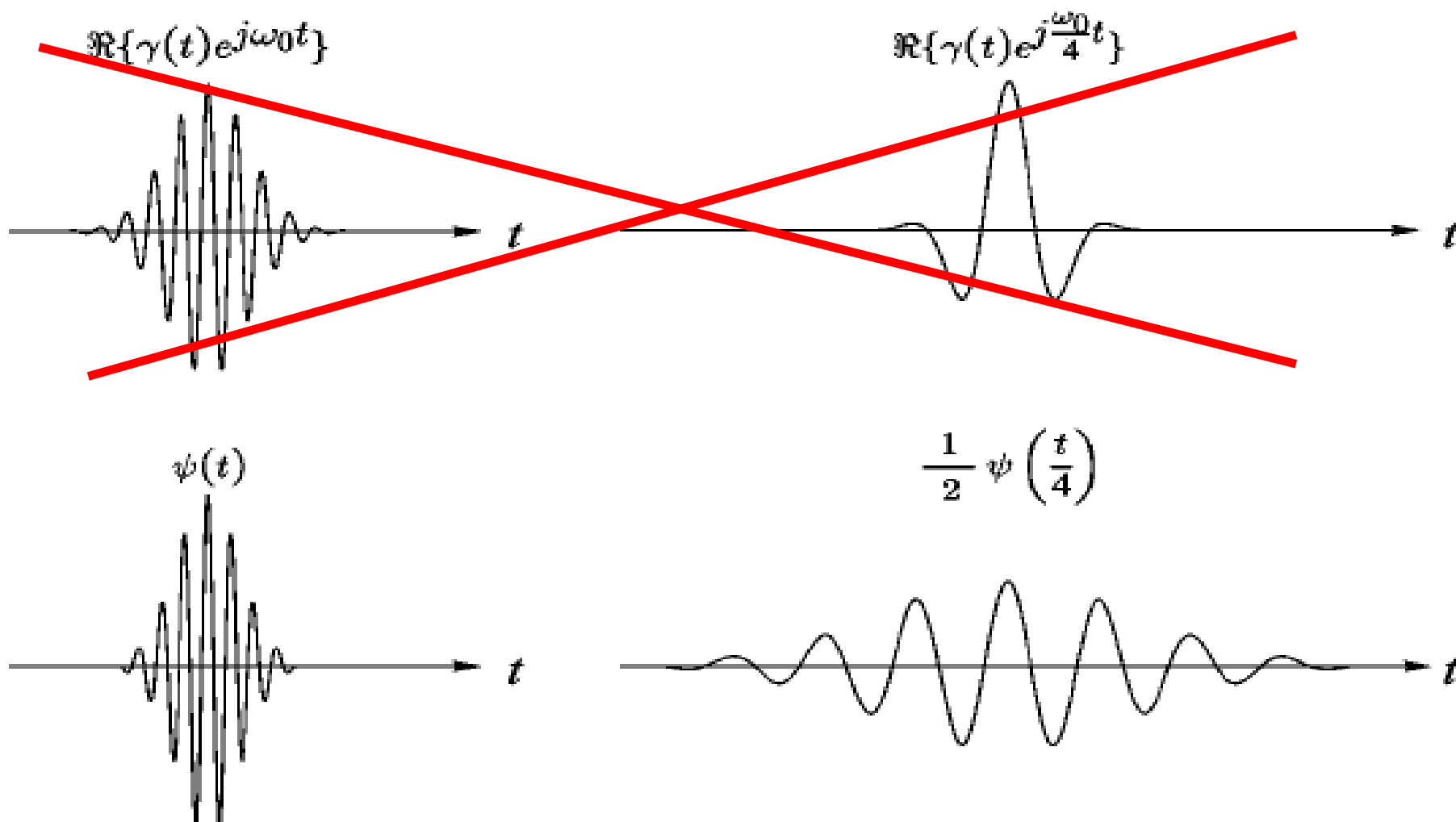
Време-честота и отместване-мащаб, STFT и WT



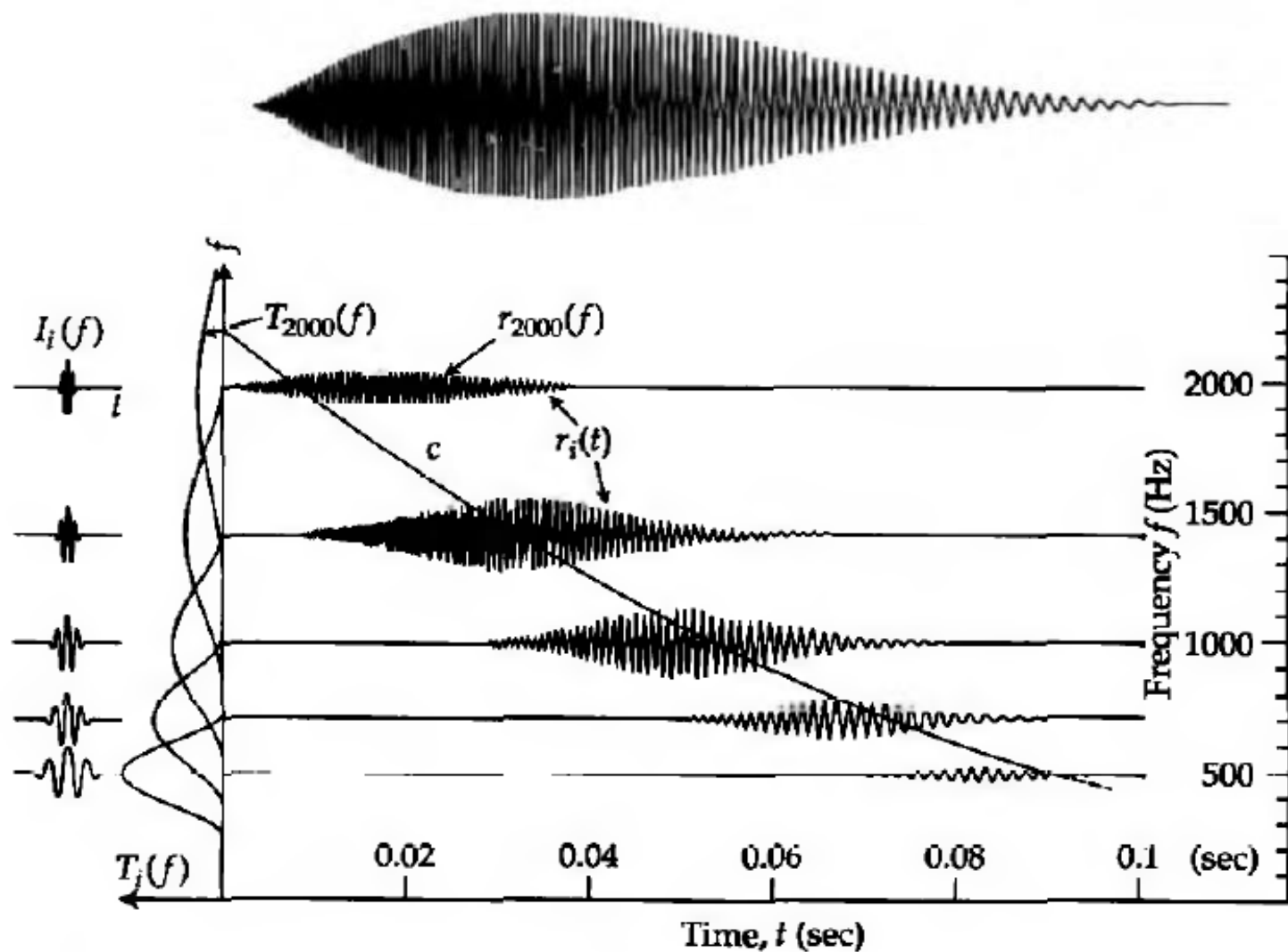
Време-честотно деление чрез
кратковременното преобразуване на Фурие, STFT



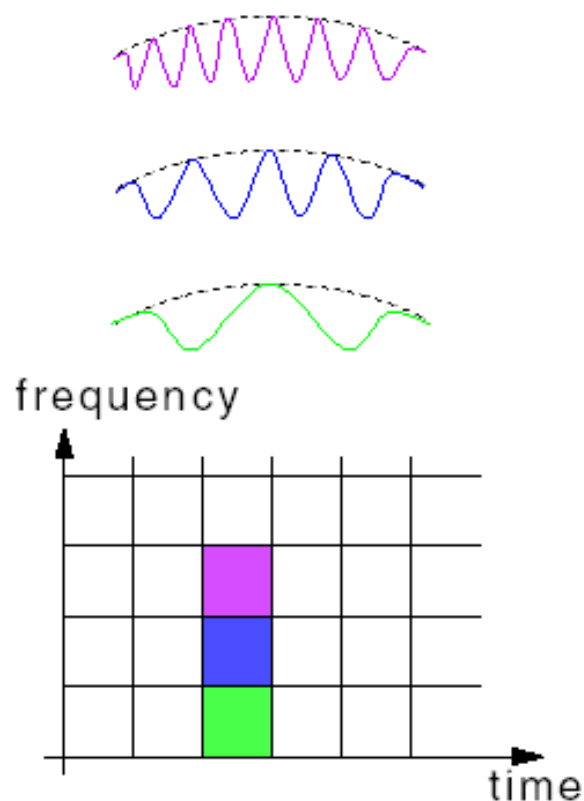
Време-честота и отместване-мащаб, STFT и WT



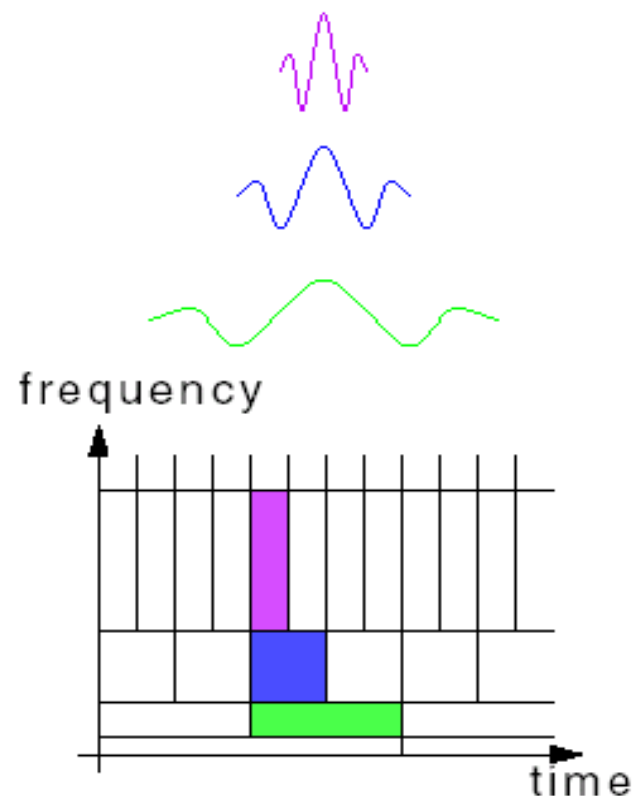
Време-честота и отместване-мащаб, STFT и WT



Време-честота и отместване-мащаб, STFT и WT



short-time Fourier transform

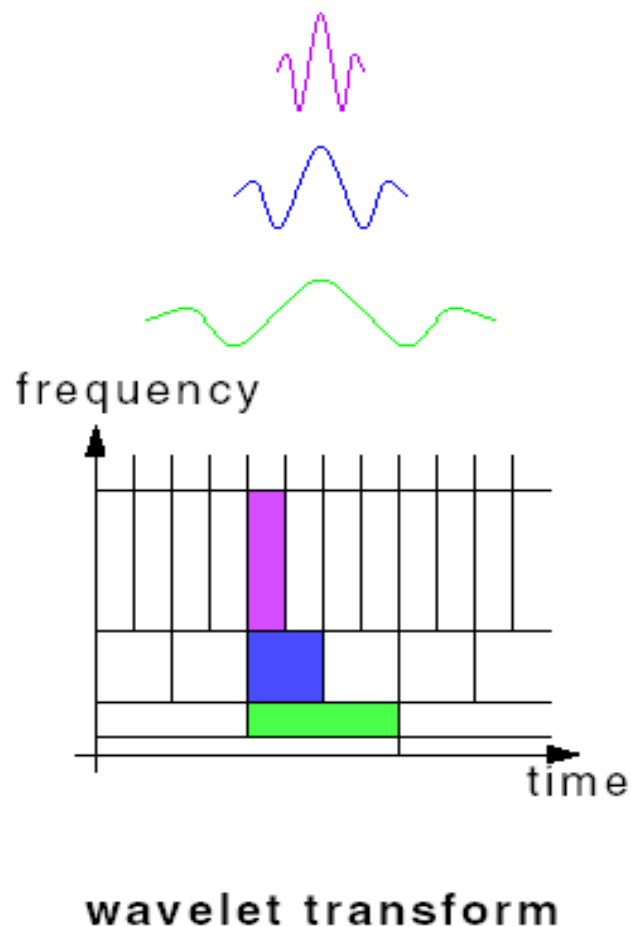


wavelet transform

Съдържание

- Дефиниране на проблема → времечестотен анализ чрез преобразуване на Габор и кратковременно преобразуване на Фурие
- Исторически сведения за уейвлетс (wavelets) и уейвлет преобразуванията
- Време-честотен анализ → сравнение между кратковременното преобразуване на Фурие и уейвлет преобразуванията
- **Непрекъснато уейвлет преобразуване за непрекъснати сигнали**
- Дискретно уейвлет преобразуване за непрекъснати сигнали

Уейвлет преобразуване (wavelet transform)



Уейвлет преобразуването представя едномерен сигнал в двумерното пространство отместване-мащаб.

Това преобразуване се извършва посредством корелация на едномерния сигнал с мащабиран и отместен вариант на избрана функция "вълничка", която отговаря на определени изисквания.

Уейвлет преобразуване (wavelet transform)

CWT

$$X_{WT}(\tau, a) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^*\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt$$

където $\psi(t)$ е непрекъснатата функция във времевата и честотна области, наречена *wavelet*. Тази wavelet функция е функцията майка, от която се получават дъщерните функции посредством отместване и мащабиране на функцията майка.

CWT по дефиниция представлява конволюция на сигнала с базис от функции генерирани от функцията майка.

Конволюцията може да се разглежда като филтрация на сигнала.

CWT може да се разглежда като търсене на отговор следния въпрос: "Дадения сигнал $x(t)$ съдържа ли една от набора базисни функции, и ако да, къде се намира?"

Уейвлет преобразуване (wavelet transform)

Inverse
CWT

$$x(t) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2} X_{WT}(\tau, a) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) d\tau da$$

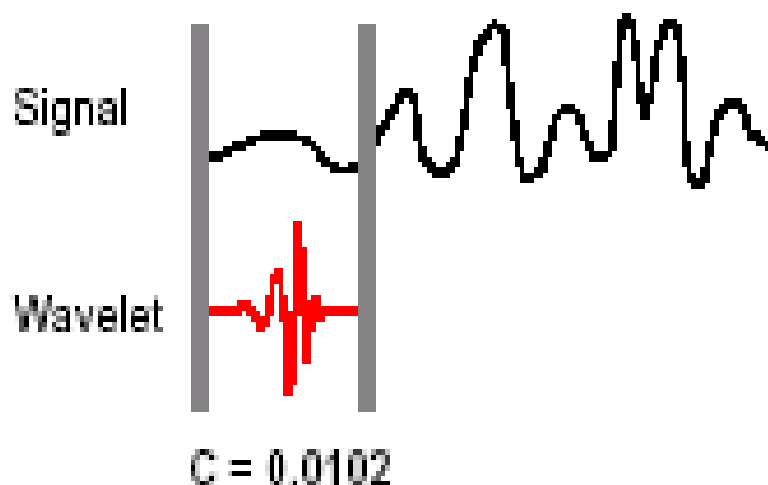
където за ортогонални уейвлетс $\psi(t) = \psi(t)$

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|a^3|} \psi\left(\frac{t_1-\tau}{a}\right) \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) d\tau da = \delta(t-t_1)$$

Уейвлет преобразуване (wavelet transform)

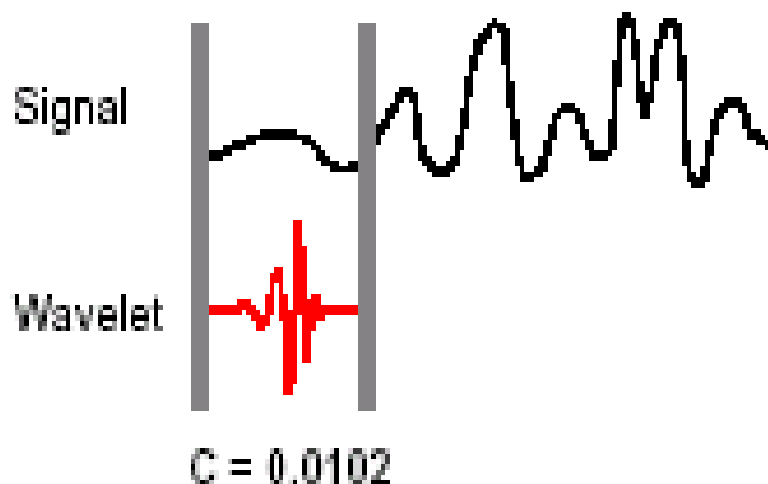
Процеса на изчисление на уейвлет коефициентите, които са функция на мащаба и позицията в сигнала може да се обобщи в следните пет стъпки :

- 1) Вземи уейвлет функция и я сравни с началния участък от сигнала



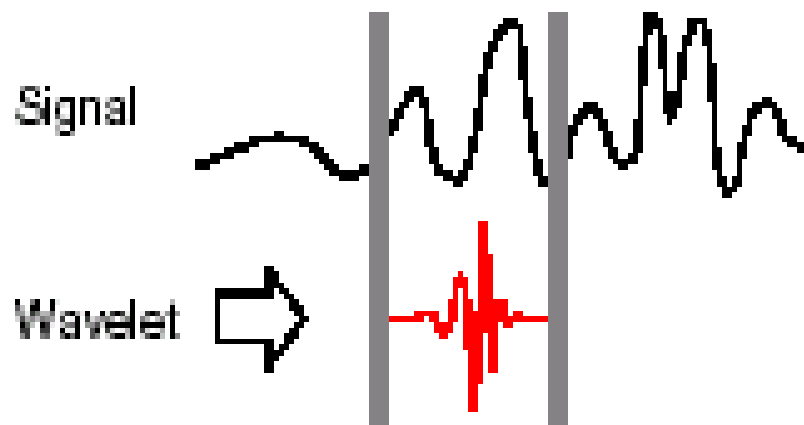
Уейвлет преобразуване (wavelet transform)

- 2) Изчисли мярката, C , която показва как уейвлет функцията е корелирана с тази порция от сигнала. По-големи стойности на C отговарят на по-голямо съвпадение между уейвлет функцията и сигнала.
(резултата силно зависи от избора на уейвлет функция)



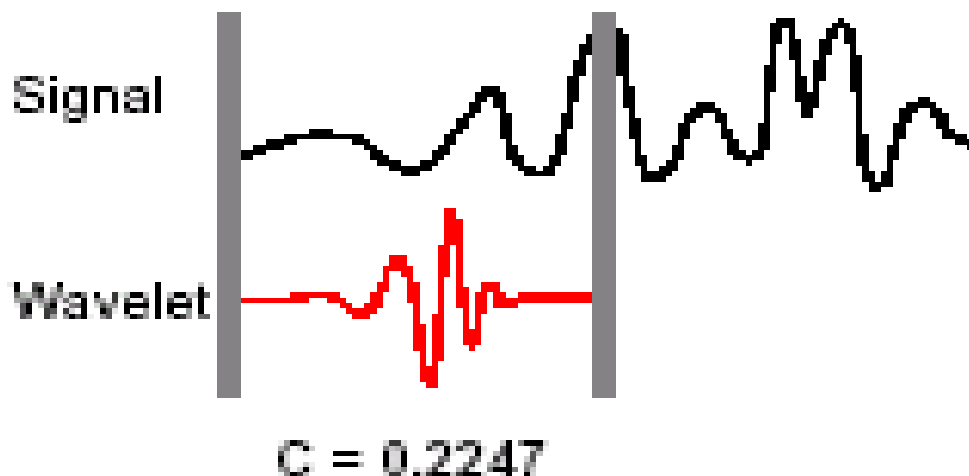
Уейвлет преобразуване (wavelet transform)

- 3) Измести уейвлет функцията надясно и повтаряй стъпки 1 и 2 до достигане края на сигнала $x(t)$.



Уейвлет преобразуване (wavelet transform)

4) Мащабирай (разпъни) уейвлет функцията и повтори стъпки от 1 до 3 за новата уейвлет функция.

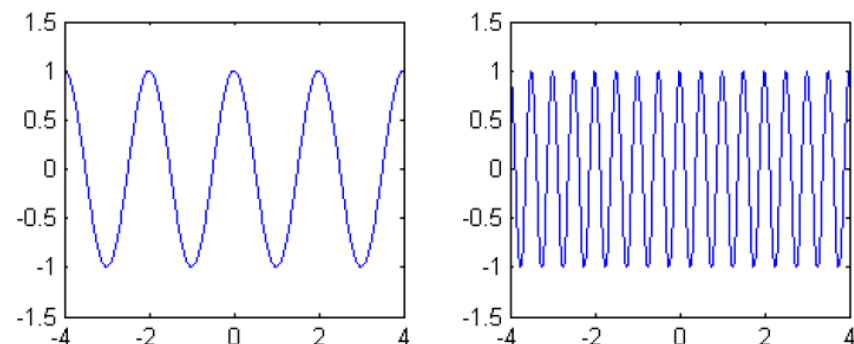


5) Повтори стъпки от 1 до 4 за всички останали мащаби на уейвлет функцията.

Базисни функции

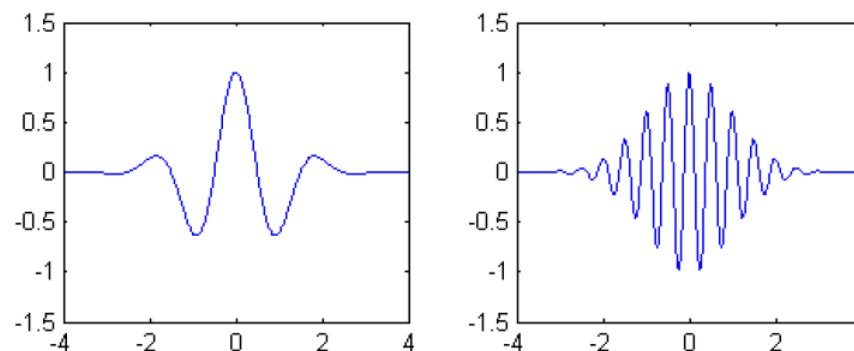
Преобразуване на Фурие, FT

$$\exp(j\omega t).$$



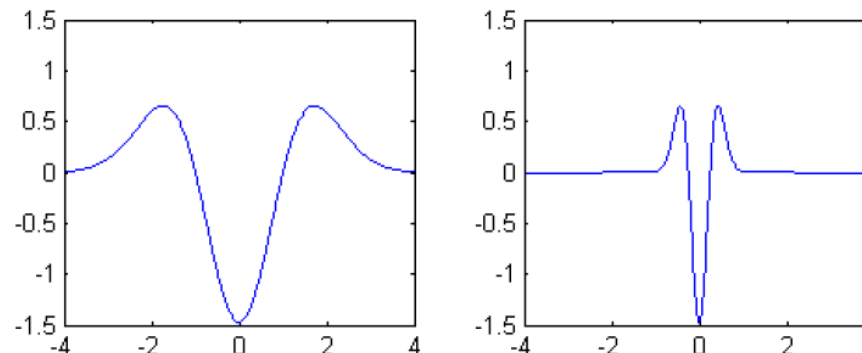
Кратковременно преобразуване на Фурие, STFT

$$w(t - u) \exp(j\xi t).$$



Уейвлет преобразуване, WT

$$\frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t - u}{s}\right).$$



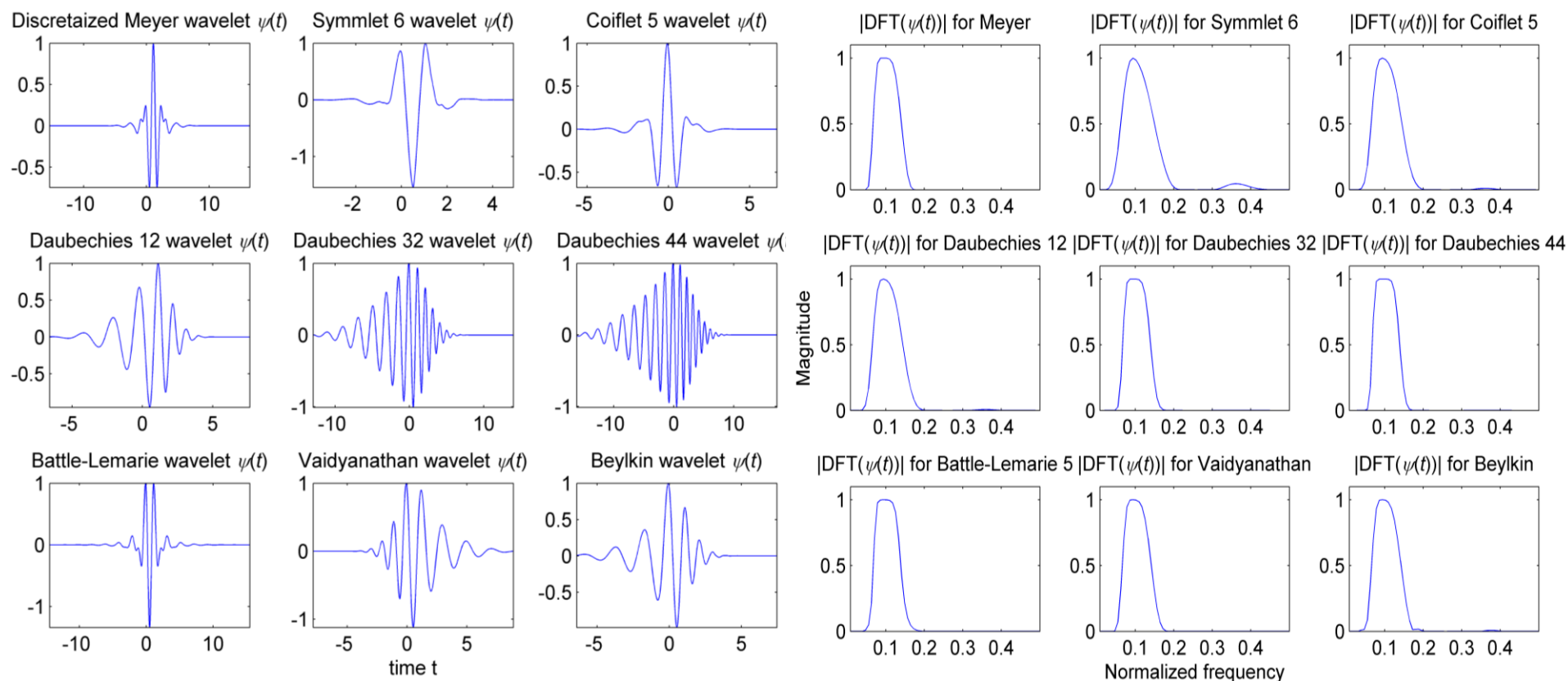
Свойства на някои wavelet функции



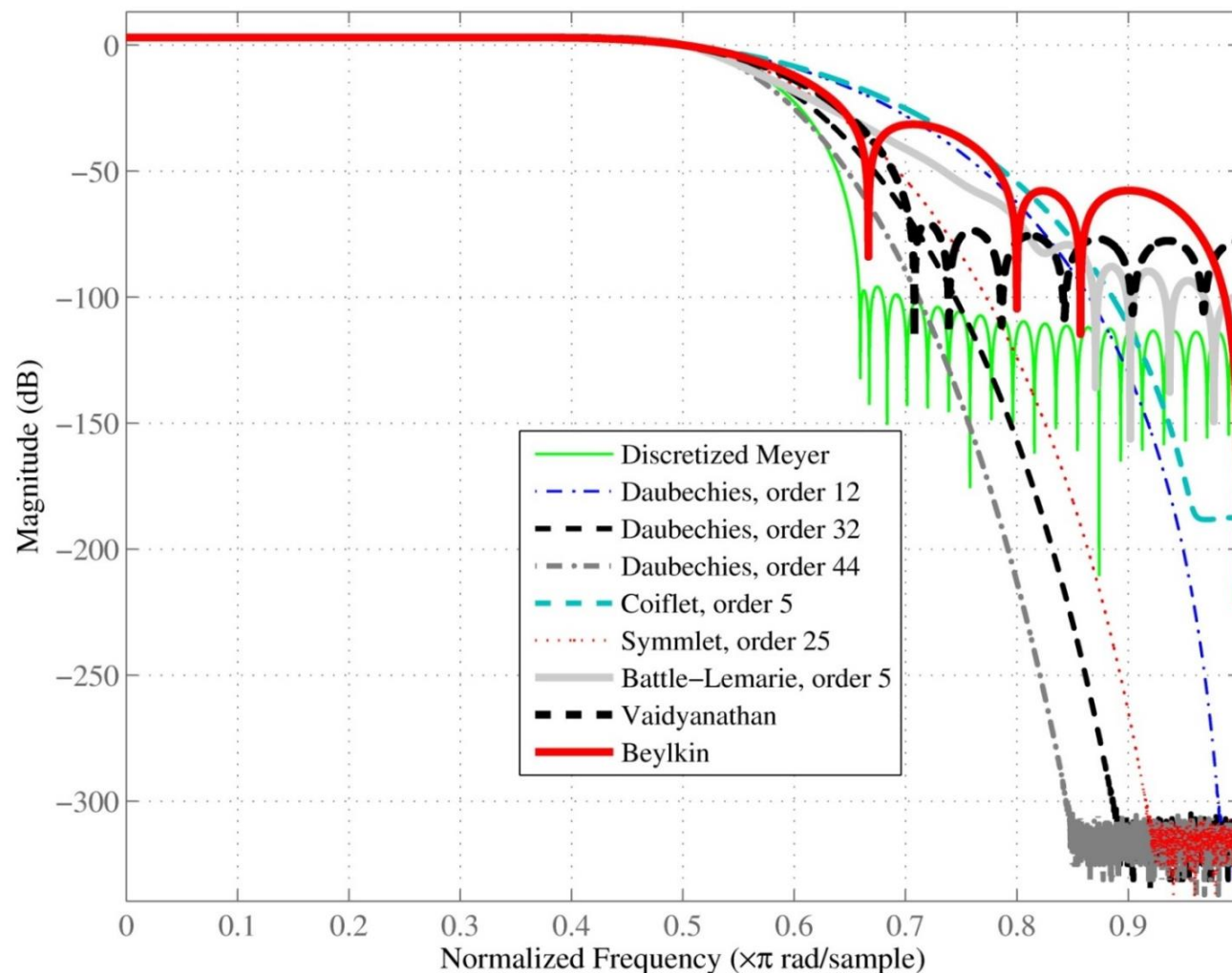
	<i>Meyer</i>	<i>Daubechies</i> (12, 32, 44)	<i>coiflet</i>	<i>Symlet</i>	<i>Battle-Lemarié</i> , order 5	<i>Vaidyanathan</i>	<i>Beylkin</i>
Support in the time domain	Polynomial decay	2N-1 (23, 63, 87)	6N-1 (29)	2N-1 (49)	Exponential decay (59)	24	18
Support in the frequency domain	Fig. 2 [2 π /3, 8 π /3]	Fig. 2 $\approx 1/\omega^{0.2N}$	Fig. 2	Fig. 2	Fig. 2 $1/\omega^N$	Fig. 2	Fig. 2
Orthogonality	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
Symmetry	Yes	No	Nearly	Nearly	Yes	No	No
Number of vanishing moments	Infinite number	N	2N	N	6 (5+1)	No	N

Свойства на някой wavelet функции

Представяне на девет wavelet функции във времевата област и техния амплитуден спектър (след Фурие преобразуване)



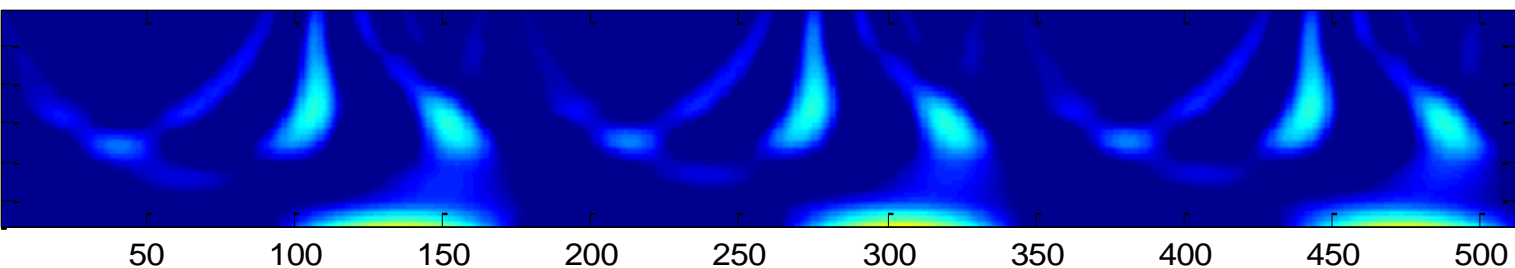
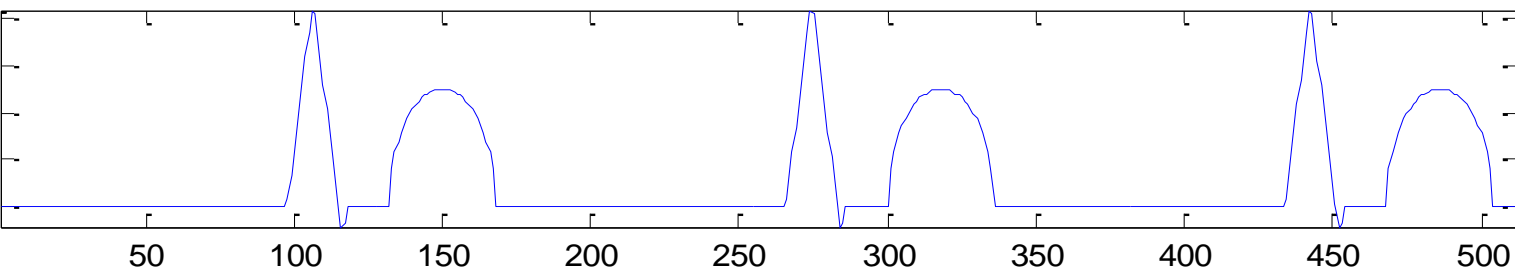
Свойства на някои wavelet функции



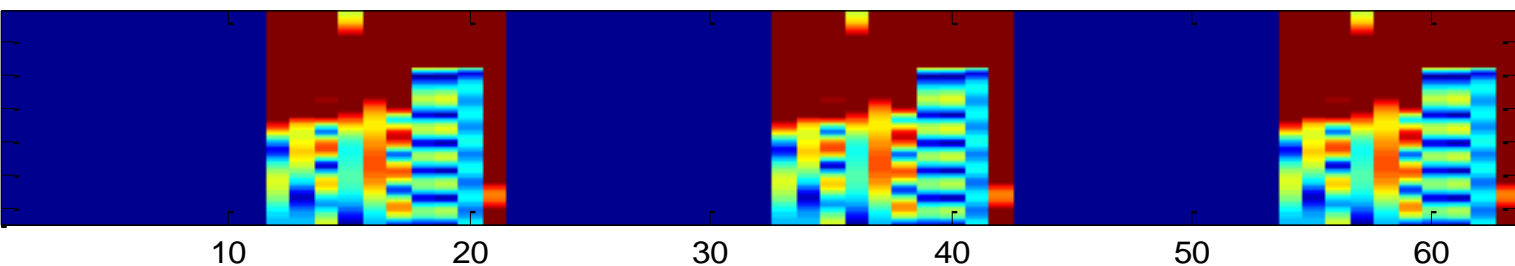


Време-частота и отместване-мащаб

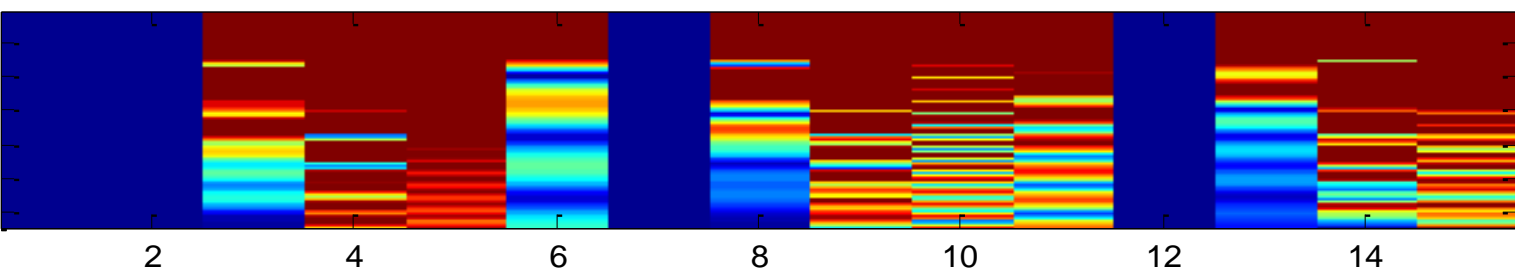
Пример



CWT(x,16,'Morlet')



spectrogram(x,16)



spectrogram(x,64)

Съдържание

- Дефиниране на проблема → времечестотен анализ чрез преобразуване на Габор и кратковременно преобразуване на Фурие
- Исторически сведения за уейвлетс (wavelets) и уейвлет преобразуванията
- Време-честотен анализ → сравнение между кратковременното преобразуване на Фурие и уейвлет преобразуванията
- Непрекъснато уейвлет преобразуване за непрекъснати сигнали
- Дискретно уейвлет преобразуване за дискретни сигнали



Дискретно уейвлет преобразуване за дискретни сигнали

$$W_{\phi}[j_0, k] = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_n f[n] \phi_{j_0, k}[n].$$

Апроксимационни
коэффициенти

$$W_{\psi}[j, k] = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_n f[n] \psi_{j, k}[n] \quad j \geq j_0.$$

Детайлни
коэффициенти

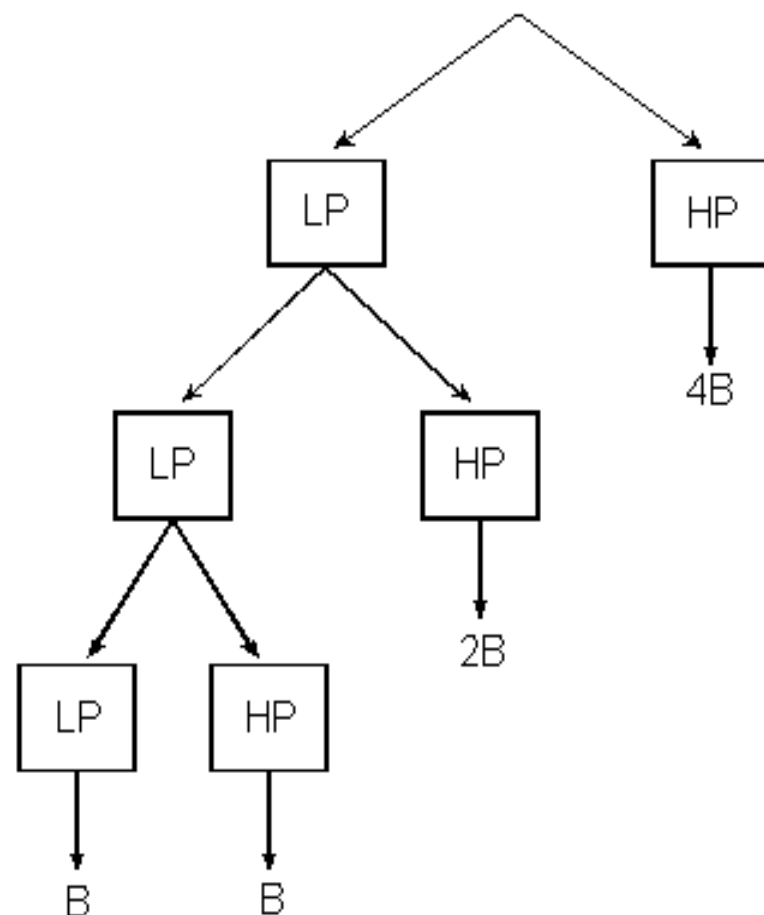
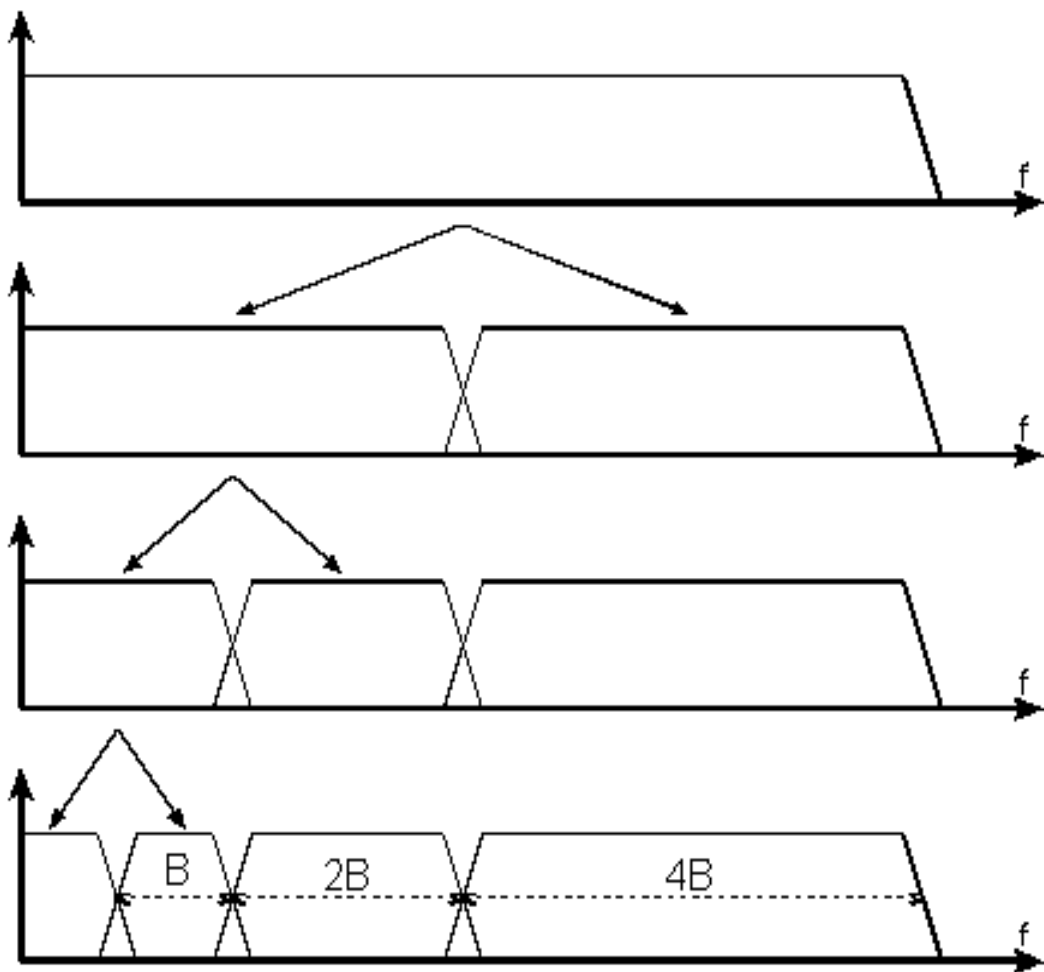
$$f[n], \phi_{j_0, k}[n], \psi_{j, k}[n] \quad n = 0, 1, \dots, M-1$$

Са дискретни
функции с
дължина M

$$\{\phi_{j_0, k}[n]\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad \{\psi_{j, k}[n]\}_{(j, k) \in \mathbb{Z}^2, j \geq j_0}$$

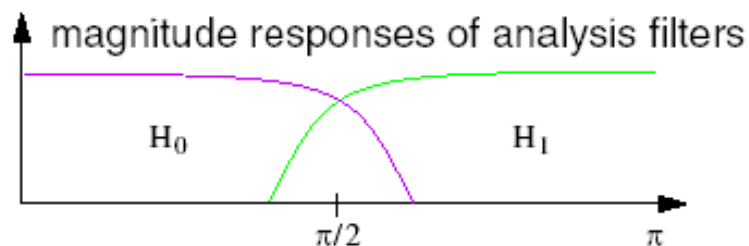
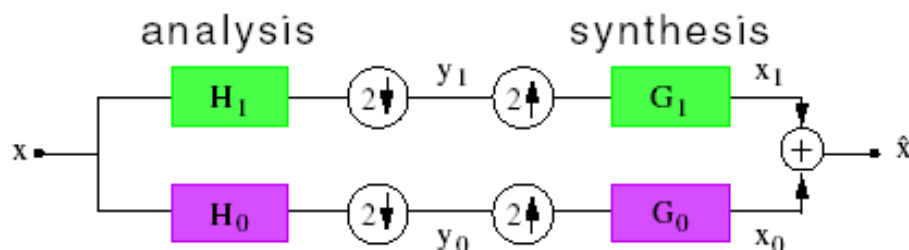
Са ортогонални

Дискретно уейвлет преобразување за дискретни сигнали



Дискретно уейвлет преобразуване за дискретни сигнали

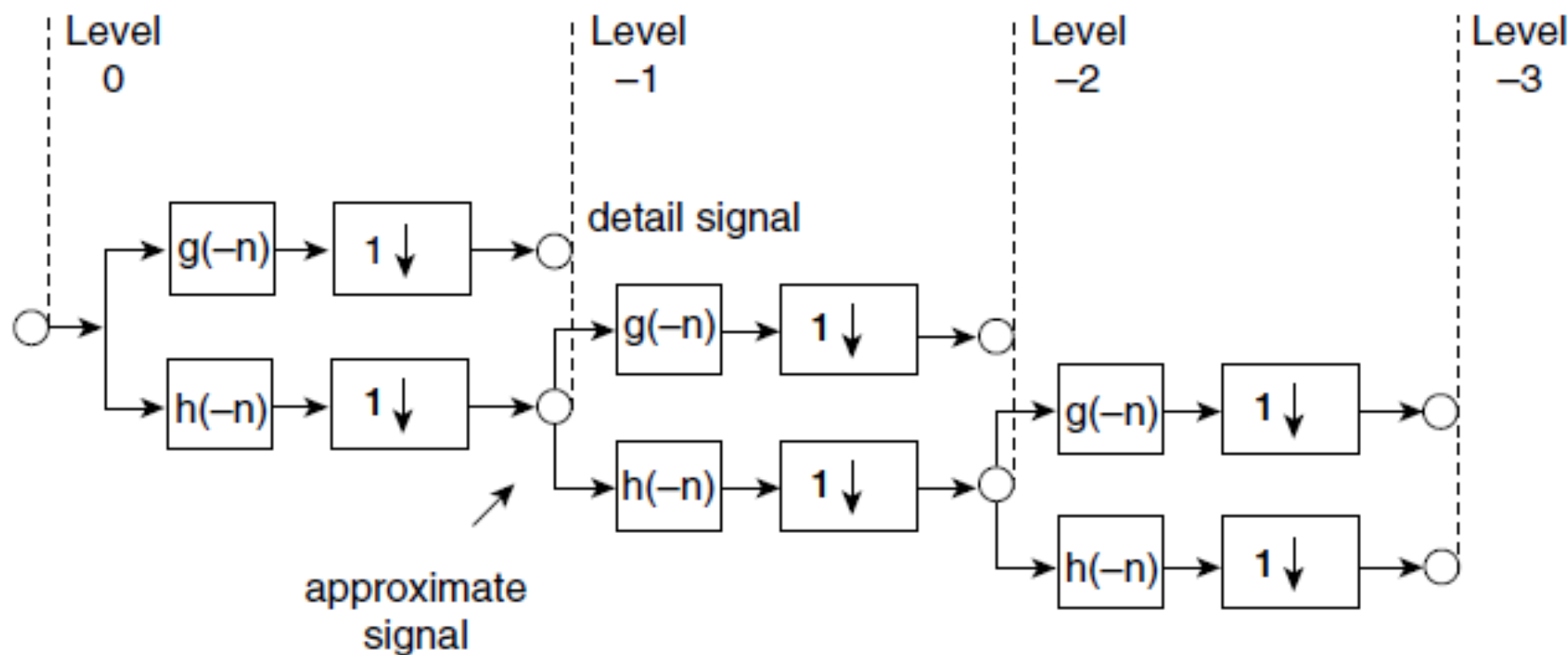
Банка филтри с идеално възтановяване на сигнала



Perfect reconstruction: $G_0 H_0 + G_1 H_1 = I$

Orthogonal system: $(H_0)^* H_0 + (H_1)^* H_1 = I G_0 = (H_1)^*$

Дискретно уейвлет преобразуване за дискретни сигнали



Дискретно уейвлет преобразуване за дискретни сигнали

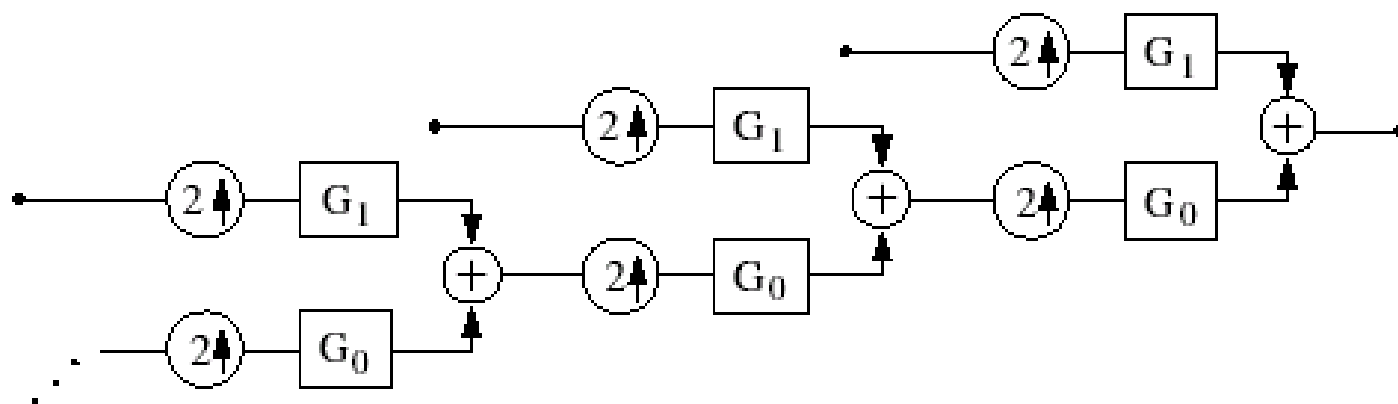


$$f[n] = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_k W_\phi[j_0, k] \phi_{j_0, k}[n] + \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k W_\psi[j, k] \psi_{j, k}[n]$$

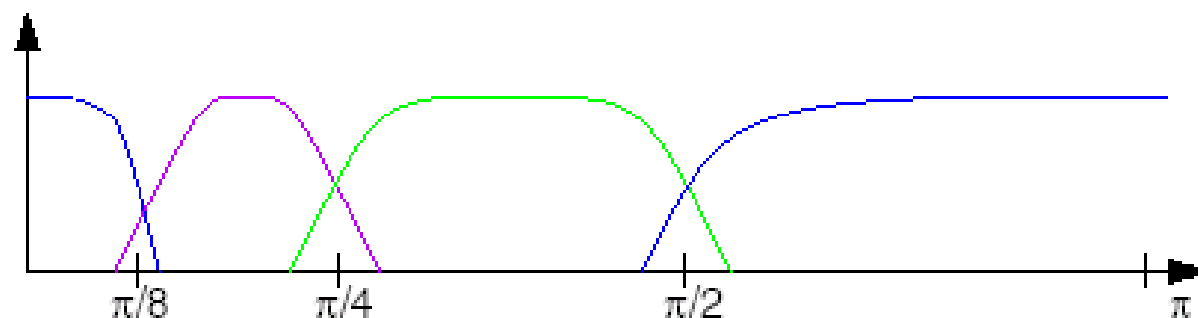
$$f[n], \phi_{j_0, k}[n], \psi_{j, k}[n] \quad n = 0, 1, \dots, M-1$$

$$\left\{ \phi_{j_0, k}[n] \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad \left\{ \psi_{j, k}[n] \right\}_{(j, k) \in \mathbb{Z}^2, j \geq j_0}$$

Дискретно уейвлет преобразуване за дискретни сигнали



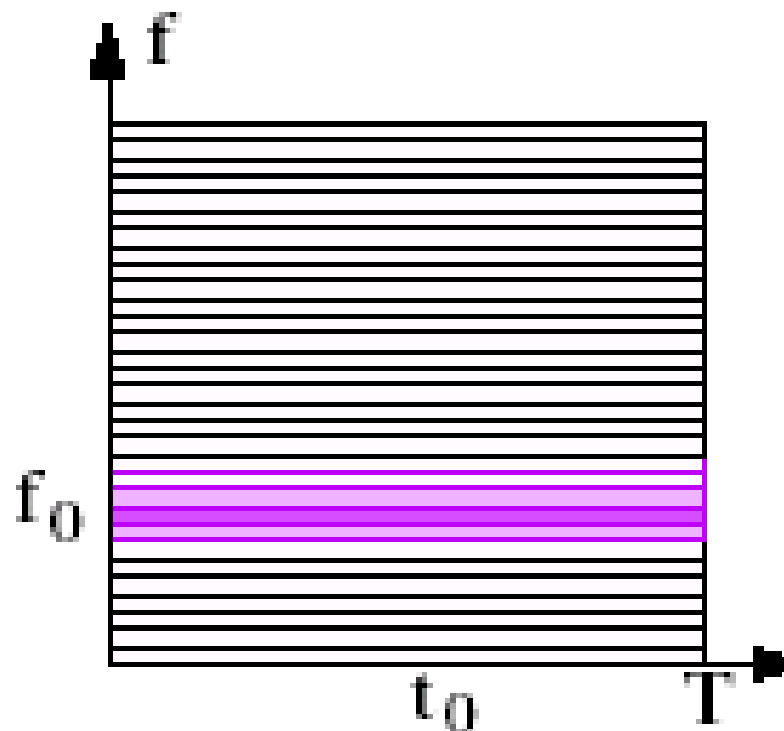
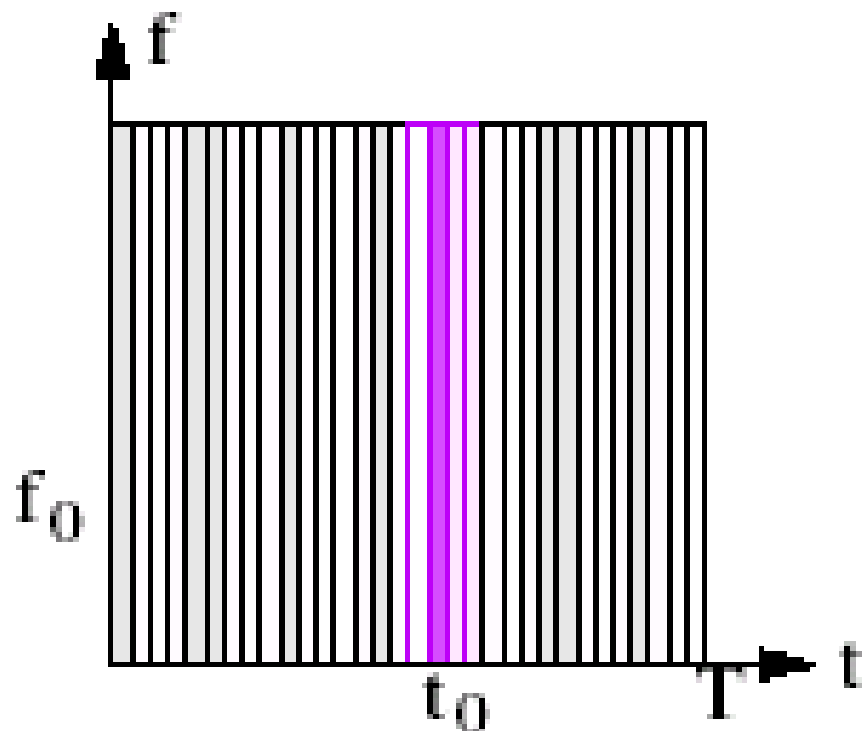
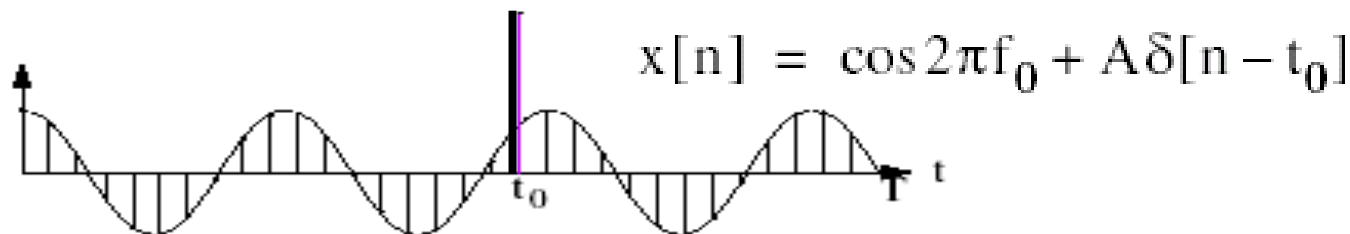
Consider equivalent basis sequences $G_0^{(i)}(z)$ and $G_1^{(i)}(z)$ (generates octave-band frequency analysis)



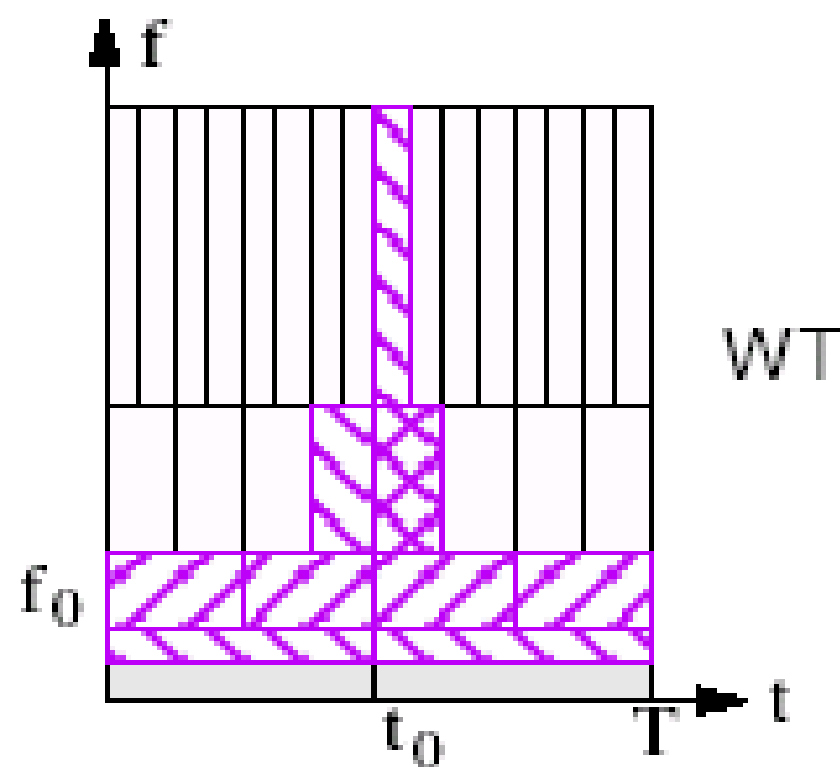
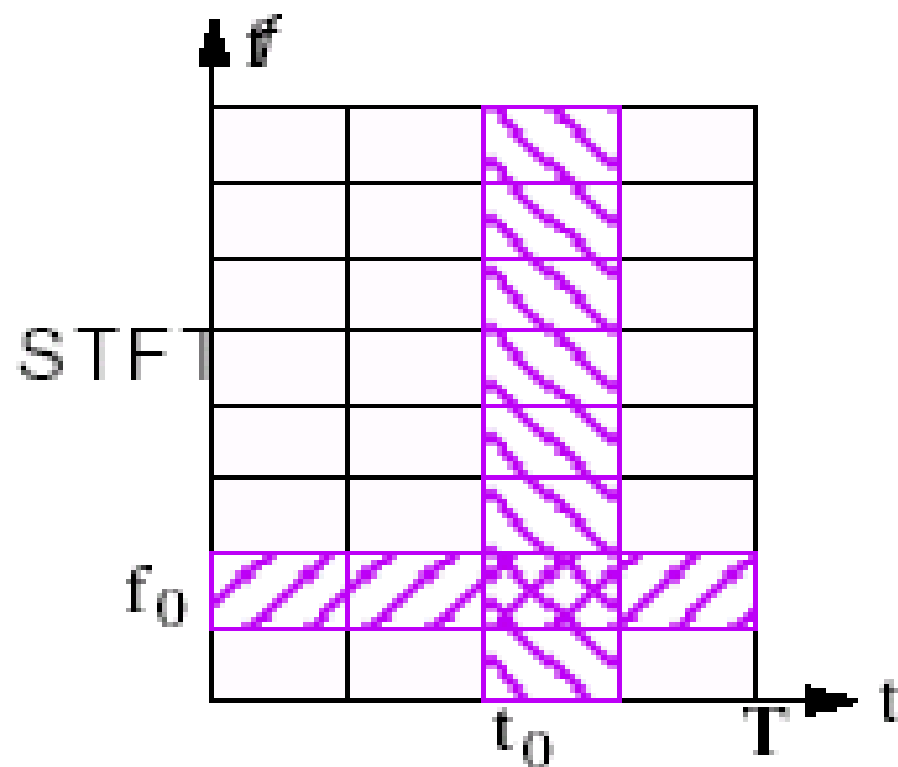
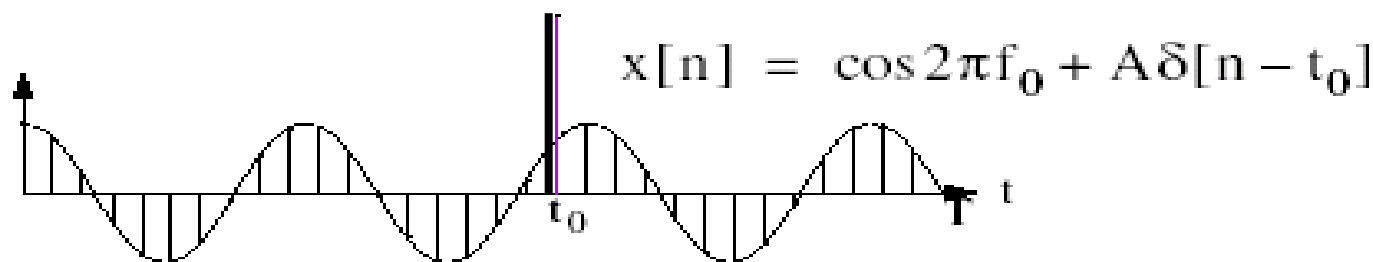
Interesting question: what happens in the limit?

Кой е най-подходящият анализ за сигнала ?

Пример:



Кой е най-подходящия анализ за сигнала ?



Приложения на уейвлетс

- В съвременни стандарти за компресия на изображения и видео JPEG 2000, MPEG-4,
- В Internet технологии за interlaced download на изображения
- При компресия на реч и аудио за нуждите на телекомуникациите
- В методи за шумоподтискане в изображения и аудио сигнали
- При анализ на математически функции
- Астрономия
- Анализ във финансовия сектор (stock market)
- В медицината (обработка на медицински сигнали, компресия на изображения, и др.)
- В невро-психологията,
- В ядреното инженерство,
- Оптика, и др.

Възможни въпроси по темата

- Каква е физическата интерпретация на непрекъснатото уейвлет преобразуване?
- В какво се изразява приликата между уейвлет преобразуванието и кратковременното преобразуване на Фурие?
- Кои за най-значимите отличителни белези на уейвлет преобразуванието в сравнение с кратковременното преобразуване на Фурие?
- Избройте някои приложения уейвлет преобразуванието?