

Цифрова обработка на сигнали

Тема #6

***Време-честотен анализ на сигналите.
Кратковременен спектрален анализ***



Съдържание

- Дефиниране на проблема
- Исторически сведения за време-честотен анализ на сигналите
- Време-честотен анализ = Динамичен спектър! Преобразуване на Габор
- Кратковременно преобразуване на Фурие за непрекъснати сигнали
- Кратковременно преобразуване на Фурие за дискретни сигнали

Дефиниране на проблема

Преобразуването на Фурие е подходящ инструмент за анализ на честотното съдържание на стационарни сигнали: $\sin(\cdot)$, $\cos(\cdot)$ и др.

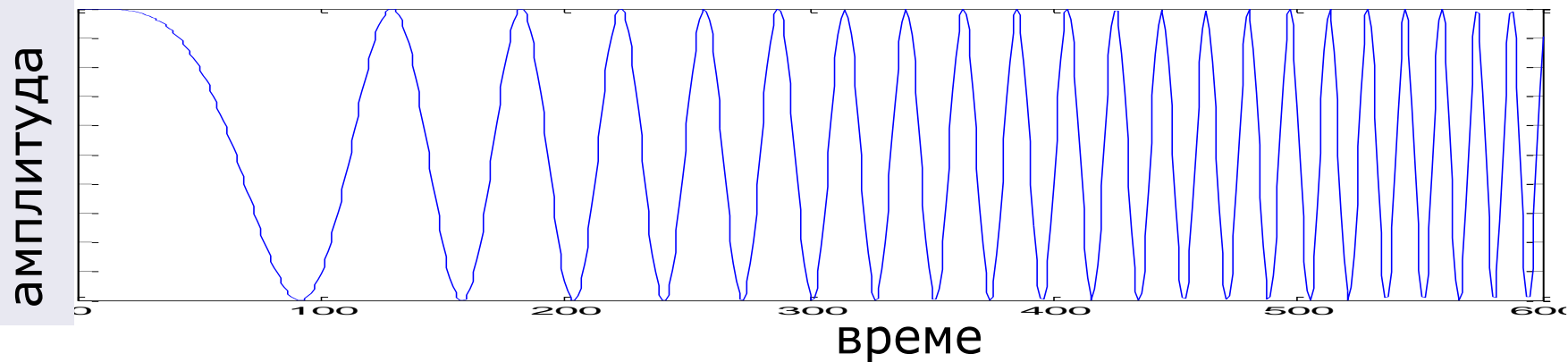
Основният проблем при анализа на реални (в голямата си част нестационарни) сигнали е да се получи информация за честотния състав на сигнала във всеки отделен момент от времето, или за даден времеви интервал.



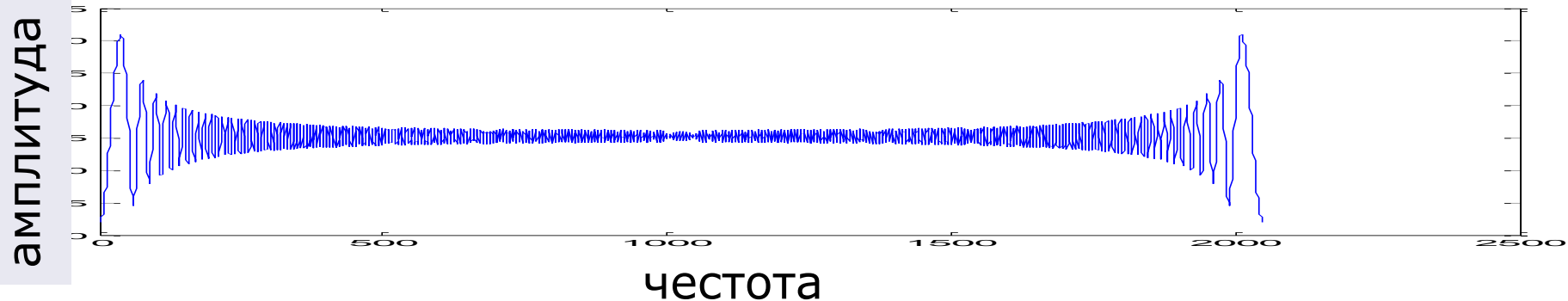
Това обаче не е възможно с традиционното преобразуване на Фурие, тъй като то представя съвкупния спектър на целия сигнал, без възможност за локализация във времето.

Пример:

Сигнал "цвърчене"



DFT за сигнал "цвърчене"



Исторически сведения за време-честотен анализ на сигналите



Alfréd Haar изследва възможността за време-честотен анализ на сигнали и дефинира т.н. Haar wavelets (1909), но те не намират широко приложение в обработката на сигнали.

След Първата Световна Война, развитието на време-честотния анализ на сигнали е мотивирано главно от необходимостта да се създадат и усъвършенстват радари.

Повлиян от бурното развитие на квантовата механика през 30те и 40те години на XX век, Denis Gabor заимства идеи и ги прилага в контекста на обработката на сигнали.

Значителен напредък в тази област е преобразуването на Габор (1946), което е вариант на кратко-временното преобразуване на Фурие и т.н. Атоми на Габор (1947), които представляват ранна форма на wavelets.

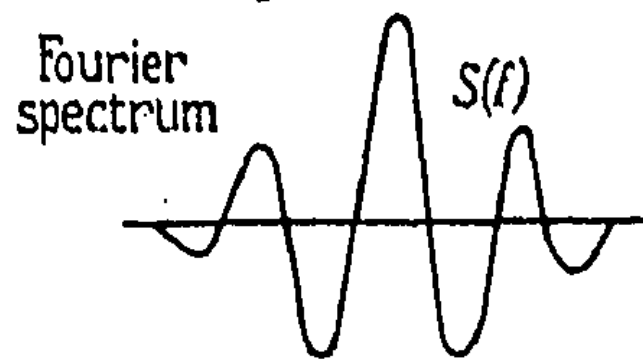
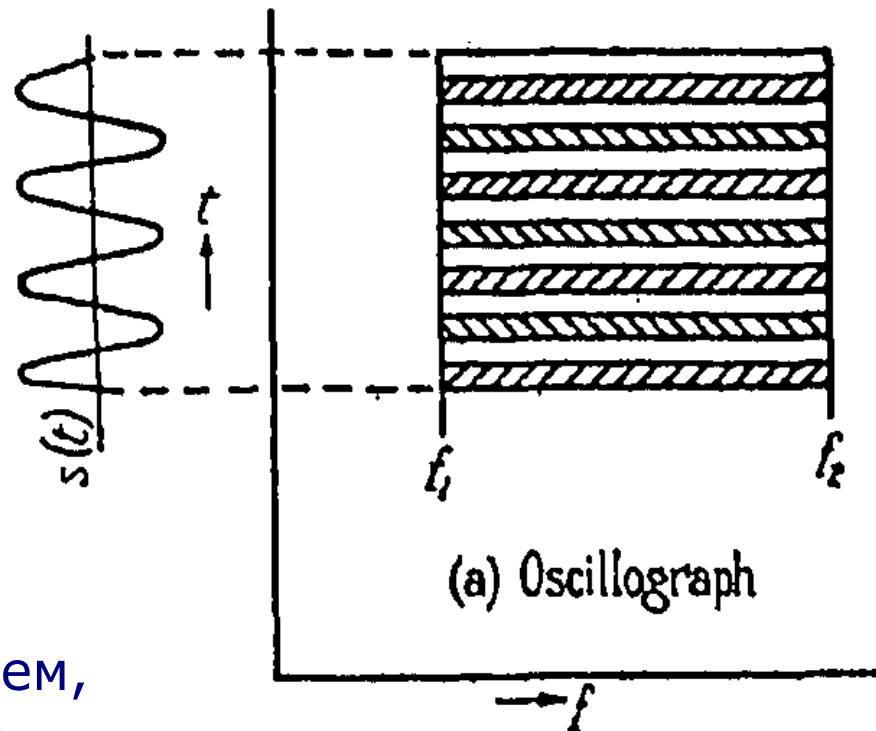
Съдържание

- Дефиниране на проблема
- Исторически сведения за време-честотен анализ на сигналите
- Време-честотен анализ = Динамичен спектър!
Преобразуване на Габор
- Кратковременно преобразуване на Фурие за непрекъснати сигнали
- Кратковременно преобразуване на Фурие за дискретни сигнали

Исторически сведения за време-честотен анализ на сигналите

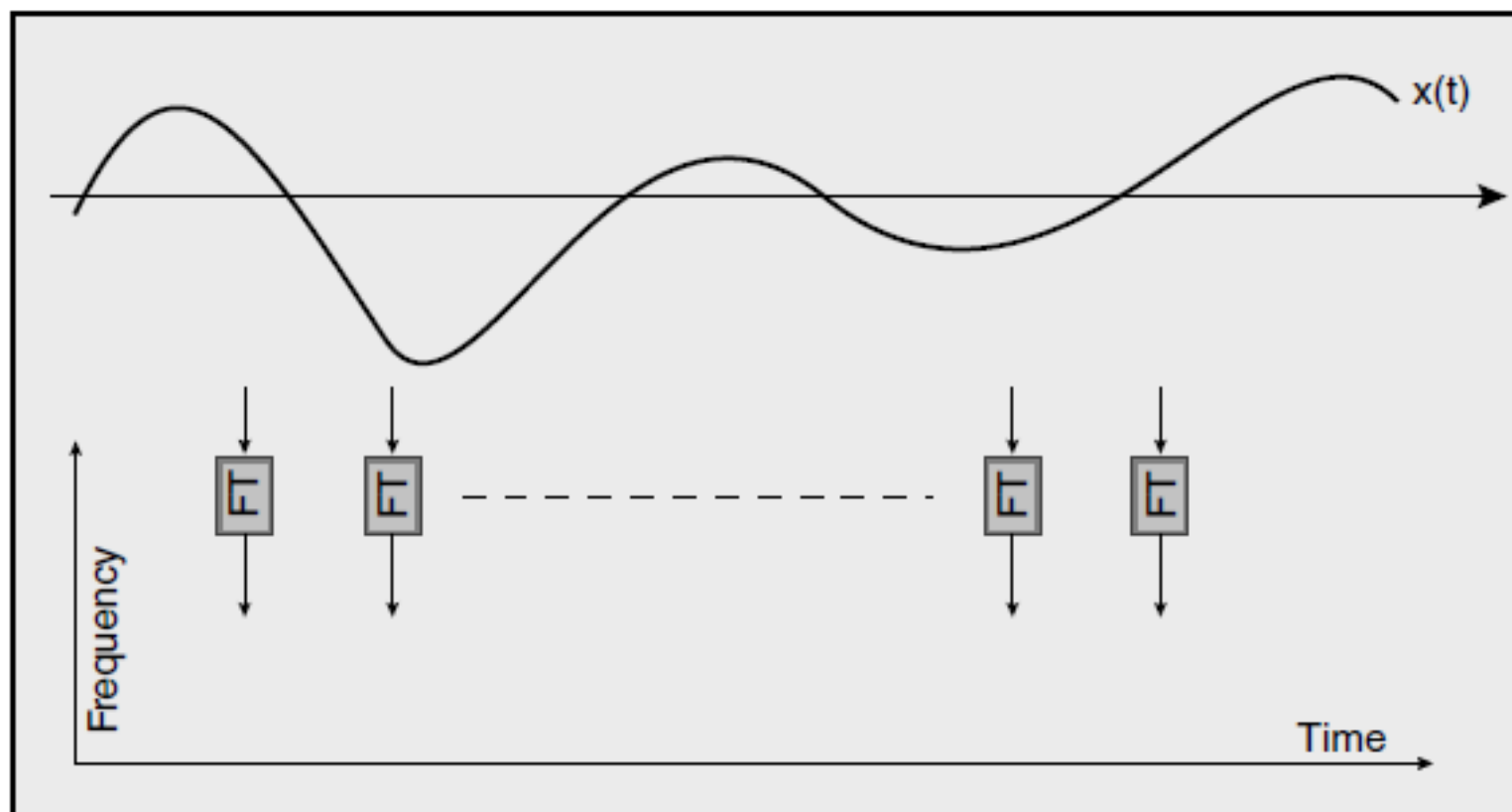


D. Gabor (1946),
"Theory of Communication"

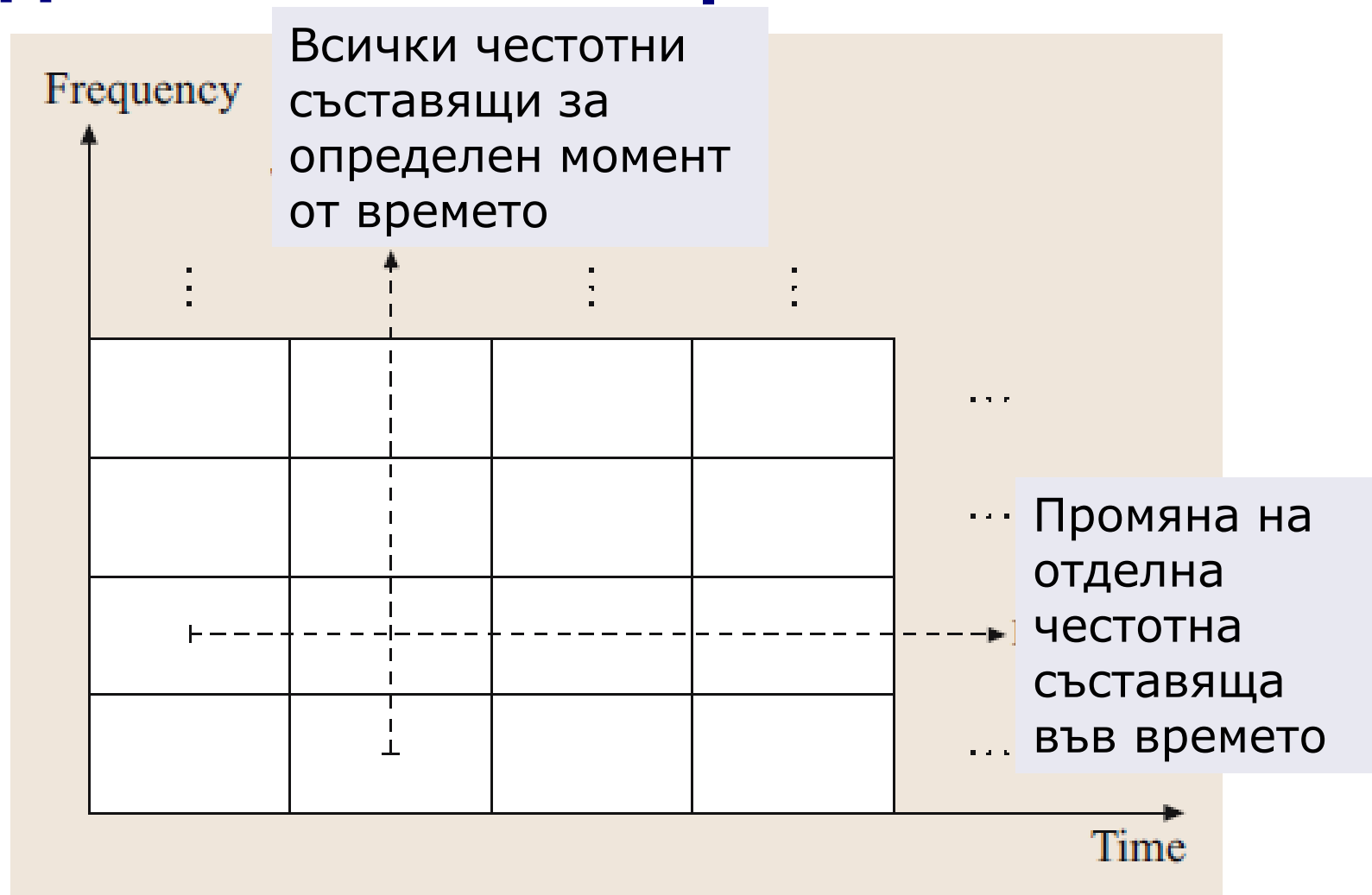


Сблъсквайки се с подобен проблем, Габор предлага време-честотно преобразуване което има за параметри времето и честотата, и се основава на преобразуването на Фурие.

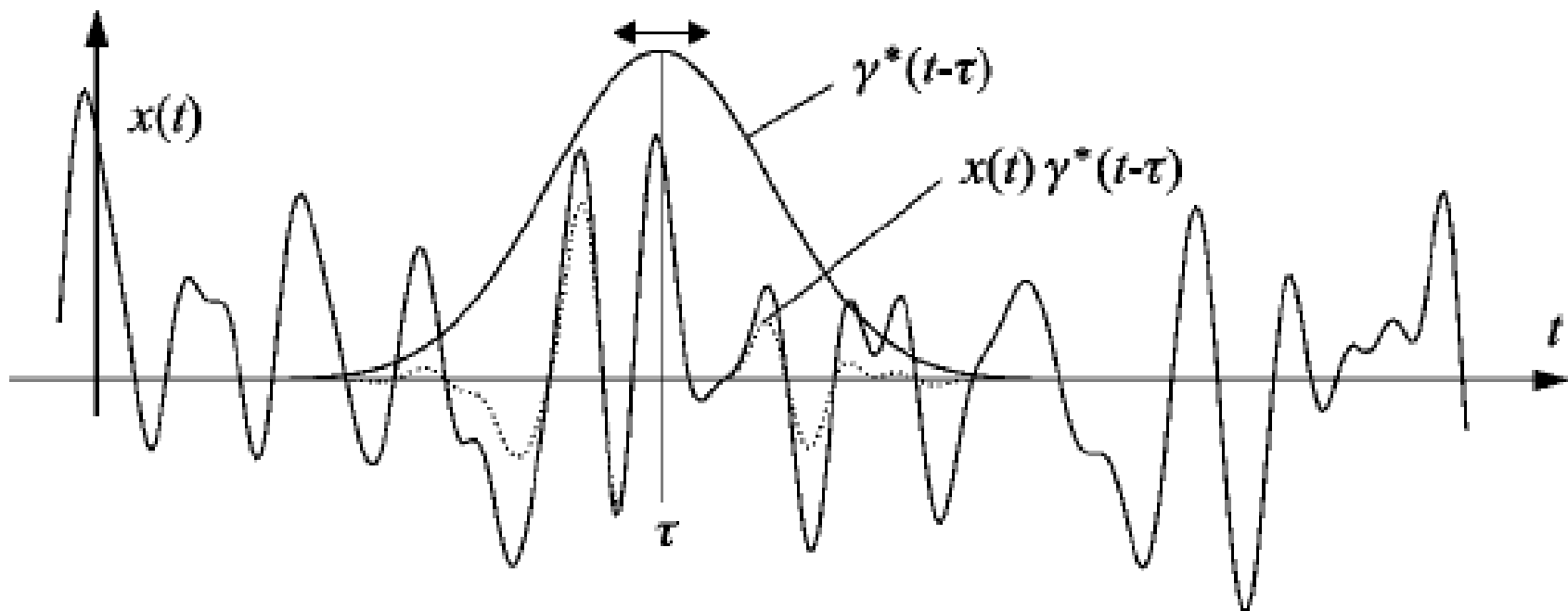
преобразуване на Gabor



Време-честотен анализ = Динамичен спектър!

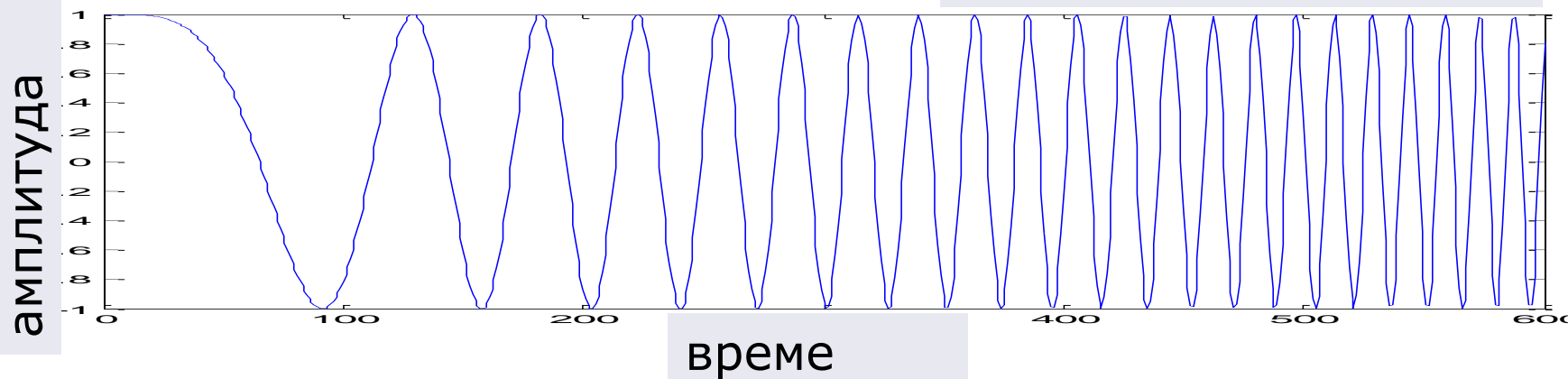


Време-честотен анализ = Динамичен спектър!

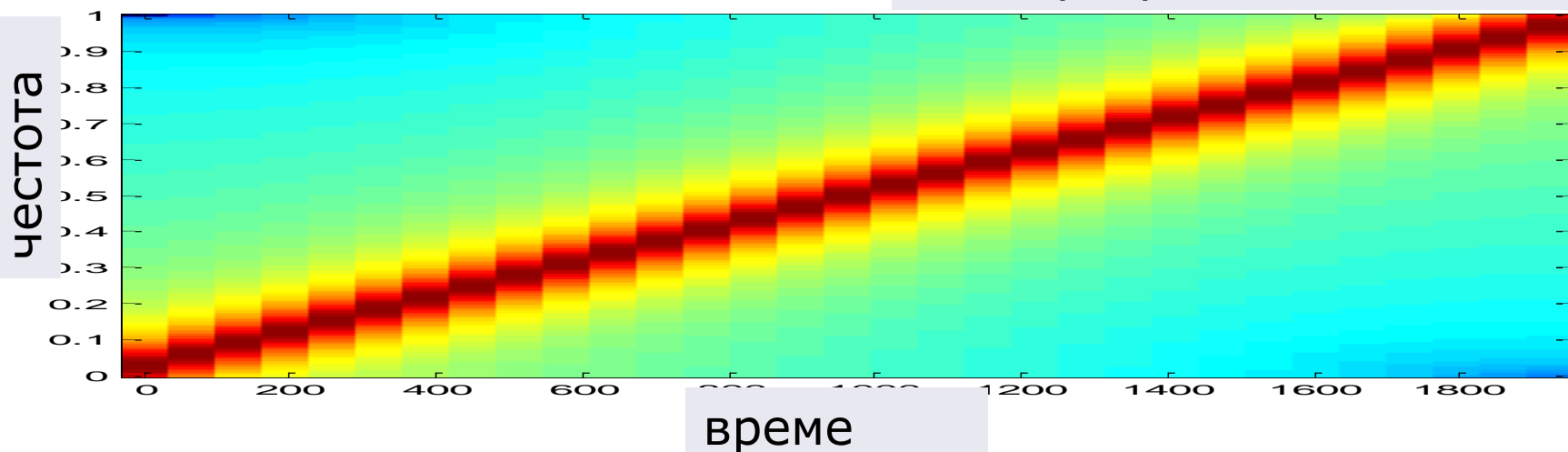


Време-честотен анализ = Динамичен спектър!

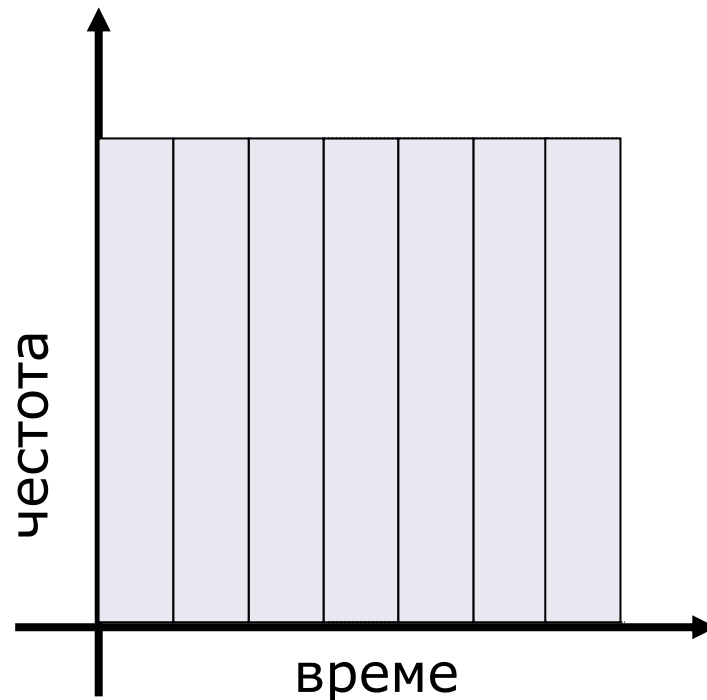
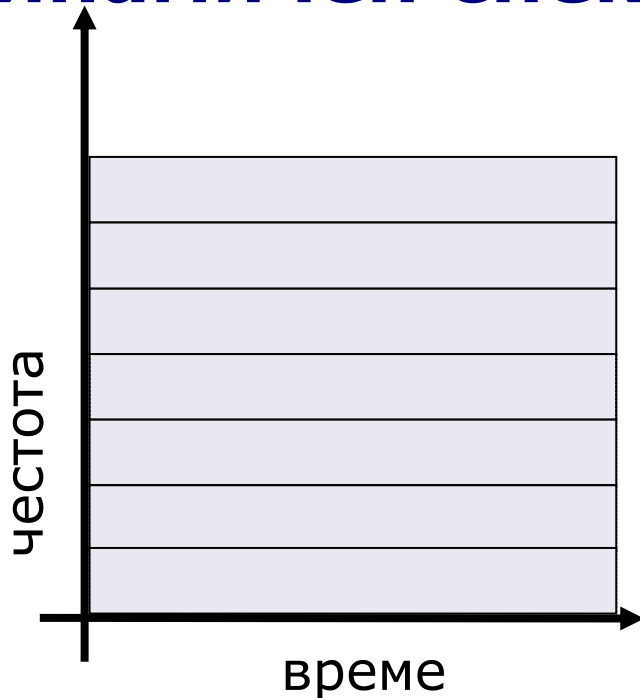
Сигнал "цвърчене"



Спектрограма на сигнала



Време-честотен анализ = Динамичен спектър!



Gabor дефинира горна граница за точността на едновременно локализация на сигнал в честотната и във времевата област, (която може да се постигне без внасяне на деформации на сигнала от припокриване на спектрите)

$$\Delta t \Delta f \simeq 1$$

Време-честотен анализ = Динамичен спектър!

Това ограничение, дефинирано от Gabor, е пряко следствие от теоремата на Benedicks, която доказва че дадена функция не може да бъде едновременно ограничена (крайна) във времето и същевременно ограничена (крайна) в честотната област, т.е.

Не е възможно едновременно дадена функция и нейното Фурие преобразуване да са ограничени (крайни).

преобразуване на Gabor

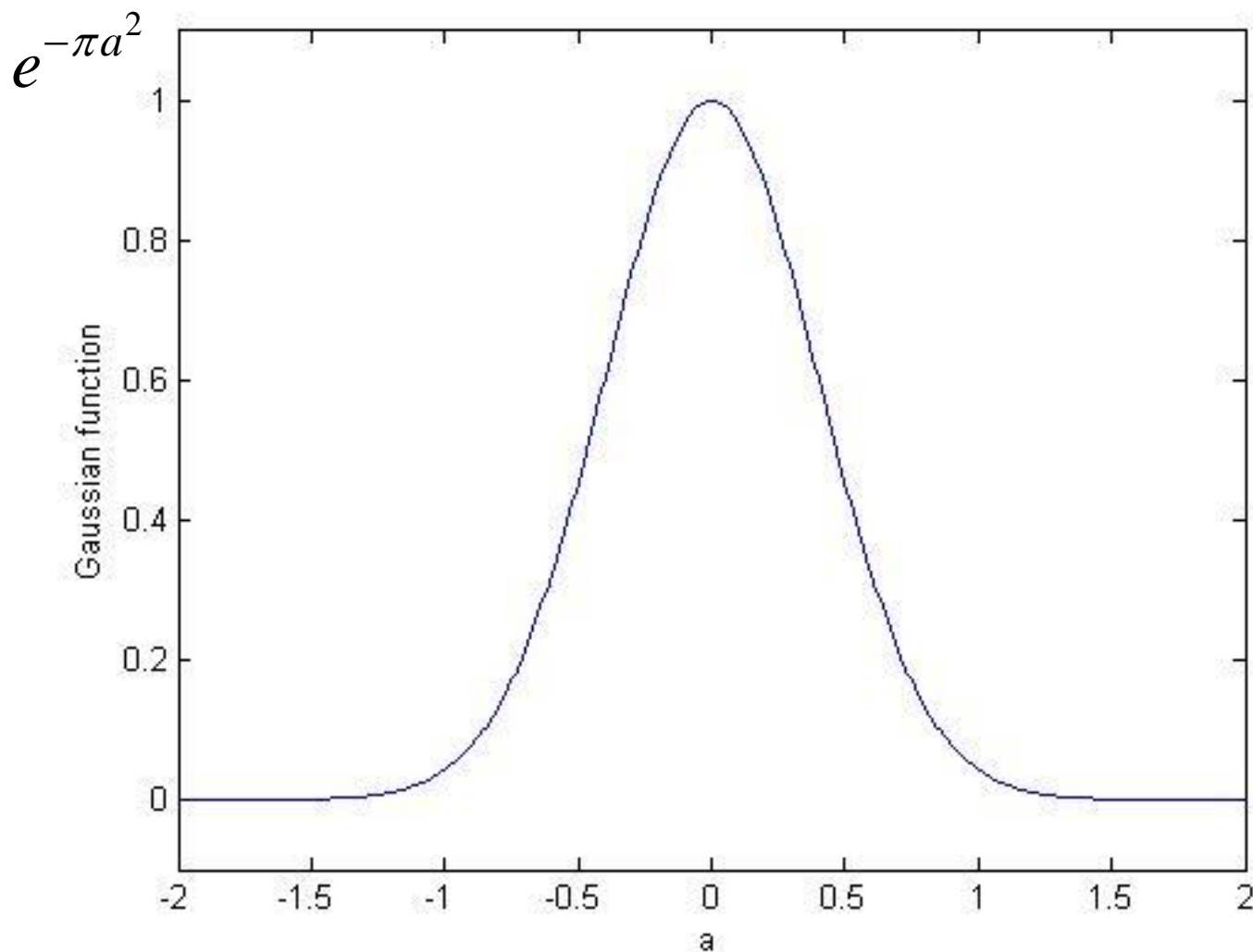
$$G_x(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(\tau-t)^2} e^{-j2\pi f\tau} x(\tau) d\tau$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(t, f) e^{j2\pi tf} df$$

По този начин, преобразуването на Gabor се дефинира като последователно прилагане на преобразуването на Фурие за порции от сигнала, определени от размера на прозоречната функция

$$e^{-\pi(\tau-t)^2}$$

преобразуване на Gabor



преобразуване на Gabor

В практически приложения безкрайният интервал на интегриране се ограничава до

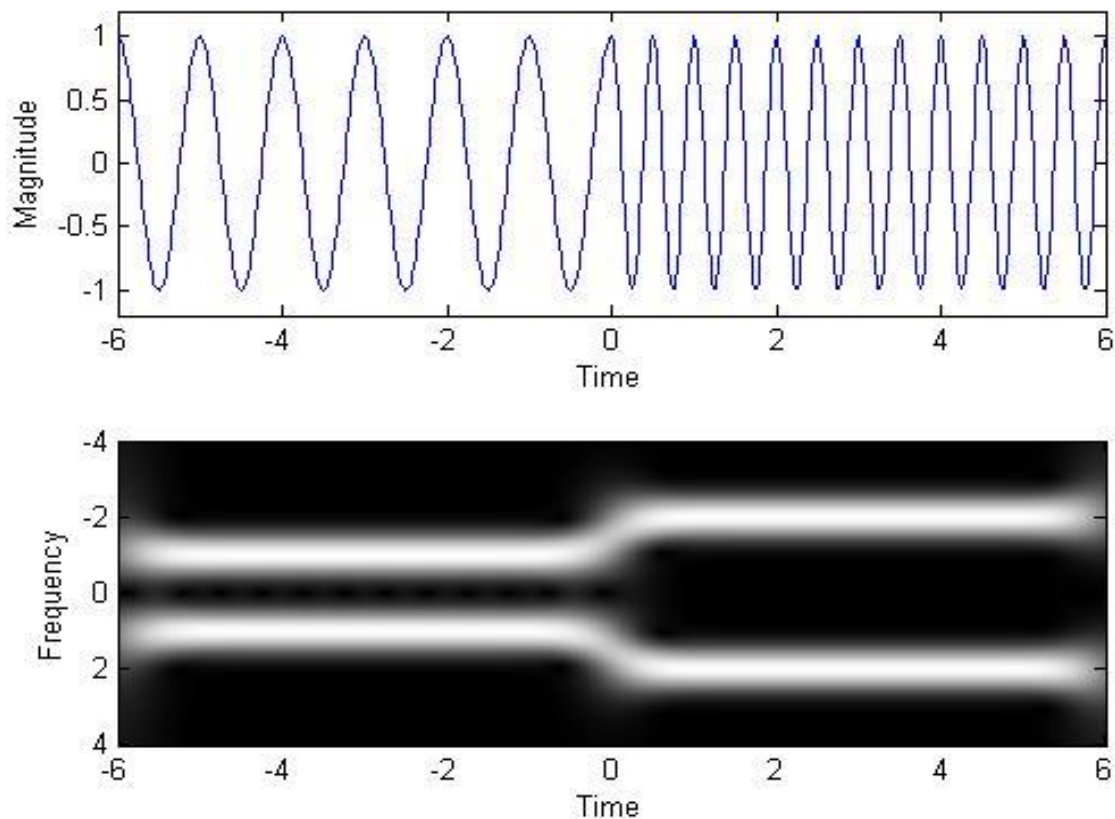
$$G_x(t, f) = \int_{-1.9143}^{1.9143} e^{-\pi(\tau-t)^2} e^{-j2\pi f\tau} x(\tau) d\tau$$

защото стойностите на прозоречната функция $e^{-\pi(\tau-t)^2}$ са пренебрежимо малки извън този интервал

$$\begin{cases} e^{-\pi a^2} \geq 0.00001; & |a| \leq 1.9143 \\ e^{-\pi a^2} < 0.00001; & |a| > 1.9143 \end{cases}$$

преобразуване на Gabor

Пример:
$$x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi t) & \text{for } t \leq 0, \\ \cos(4\pi t) & \text{for } t > 0. \end{cases}$$



Съдържание

- Дефиниране на проблема
- Исторически сведения за време-честотен анализ на сигналите
- Време-честотен анализ = Динамичен спектър! Преобразуване на Габор
- Кратковременно преобразуване на Фурие за непрекъснати сигнали
- Кратковременно преобразуване на Фурие за дискретни сигнали

Кратковременно преобразуване на Фурие за непрекъснати сигнали

Кратковременното преобразуване на Фурие за непрекъснати сигнали, short-time Fourier transform (STFT), представлява обобщение на преобразуването на Gabor

$$X_{ST}(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) w(t - \tau) e^{-j\omega t} dt$$

където прозоречна функция на Gabor е заменена с произволна прозоречна функция $w(t)$

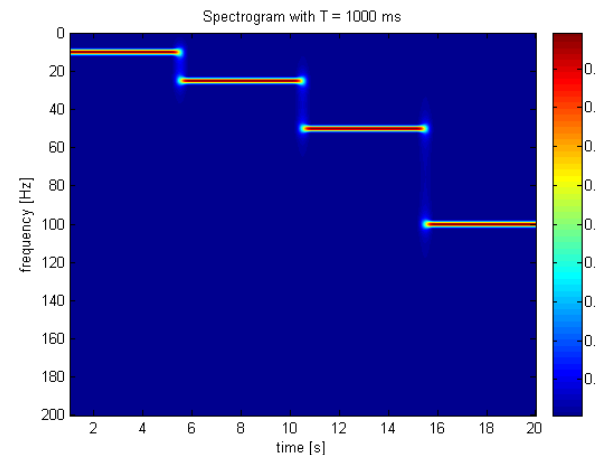
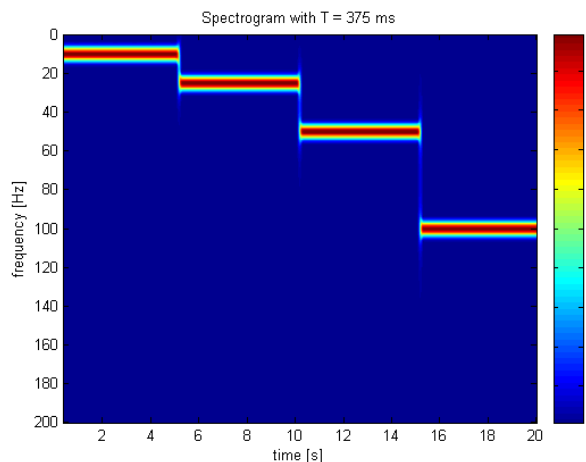
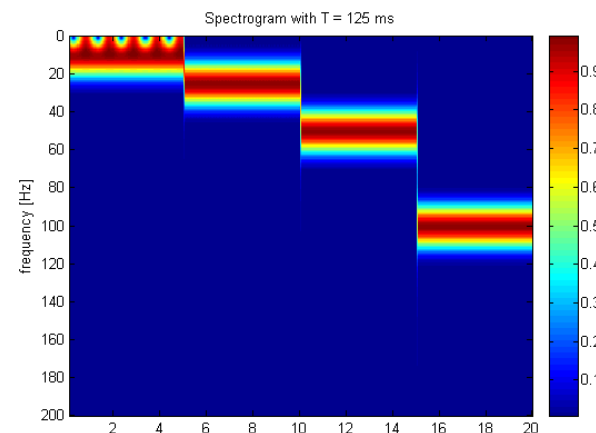
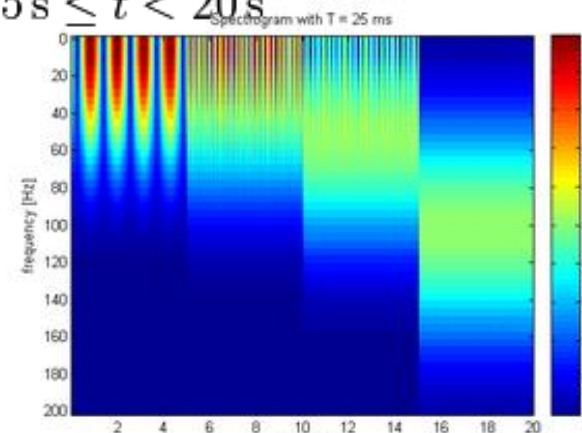
По същият начин както при преобразуването на Gabor, прозоречната функция се отмества във времето (посредством параметъра τ) за да се избере времевия интервал, който ще бъде анализиран.

Кратковременно преобразуване на Фурие за непрекъснати сигнали

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi 10t/s) & 0s \leq t < 5s \\ \cos(2\pi 25t/s) & 5s \leq t < 10s \\ \cos(2\pi 50t/s) & 10s \leq t < 15s \\ \cos(2\pi 100t/s) & 15s \leq t < 20s \end{cases}$$

$$f_s = 400 \text{ Hz}$$

STFT при
различна
дължина на
прозореца w :
25 ms,
125 ms,
375 ms,
1000 ms



Кратковременно преобразуване на Фурие за непрекъснати сигнали

Обратното кратко временно преобразуване на Фурие за непрекъснати сигнали, inverse short-time Fourier transform (STFT), се дефинира като

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega, \tau) e^{j\omega t} d\omega d\tau$$

или

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega, \tau) e^{j\omega t} d\omega \right] d\tau$$

т.е.

$$x(t)w(t-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega, \tau) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{за фиксирана стойност на } \tau$$

Name	Definition
Rectangle	$w(t) = \begin{cases} b & \text{if } (t \leq a) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$
Bartlett (triangle)	$w(t) = \begin{cases} \frac{b}{a}t + b & \text{if } -a \leq t \leq 0, \\ -\frac{b}{a}t + b & \text{if } 0 \leq t \leq a, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$
Hanning (von Hann)	$w(t) = \begin{cases} b \cos^2\left(\frac{\pi t}{2a}\right) & \text{if } t \leq a \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$
Hamming	$w(t) = \begin{cases} 0.54b + 0.46b \cos\left(\frac{\pi t}{a}\right) & \text{if } t \leq a \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$
Blackman	$w(t) = \begin{cases} 0.42b + 0.5b \cos\left(\frac{\pi t}{a}\right) + 0.08b \cos\left(\frac{2\pi t}{a}\right) & \text{if } t \leq a \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$

^aAdjust parameter $a > 0$ for a window width appropriate to the signal features of interest. Adjust parameter $b > 0$ in order to normalize the window function.

Съдържание

- Дефиниране на проблема
- Исторически сведения за време-честотен анализ на сигналите
- Време-честотен анализ = Динамичен спектър!
- преобразуване на Габор
- Кратковременно преобразуване на Фурие за непрекъснати сигнали
- Кратковременно преобразуване на Фурие за дискретни сигнали

Кратковременно дискретно преобразуване на Фурие за дискретни сигнали

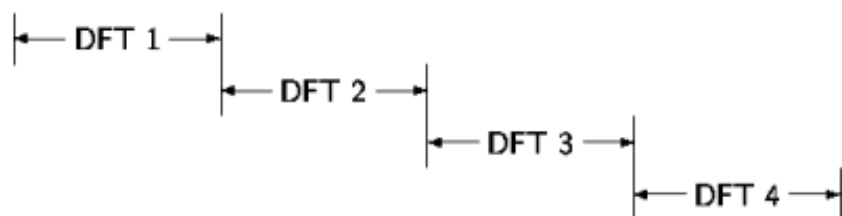
Кратковременното дискретно преобразуване на Фурие за дискретни сигнали, Short-Time Discrete Fourier Transform, STDFT, е функция на две променливи

$$\begin{aligned} X(k, l) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) w(n - lL) e^{-jk(2\pi/N)n} = \\ &= \sum_{n=lL}^{lL+N-1} x(n) w(n - lL) e^{-jk(2\pi/N)n} \end{aligned}$$

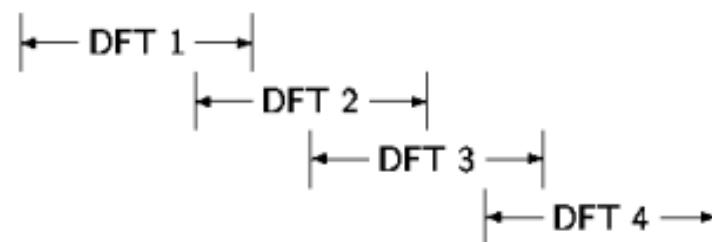
$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} X(k, l) e^{jk(2\pi/N)n}$$

Кратковременно дискретно преобразуване на Фурие за дискретни сигнали

NO OVERLAP



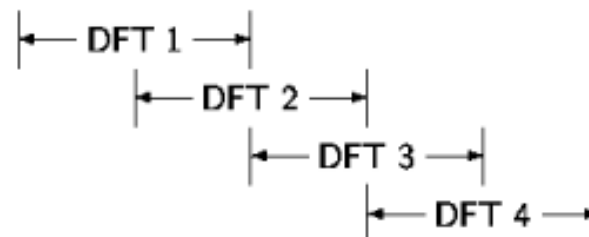
R/4 OVERLAP



The parameter L

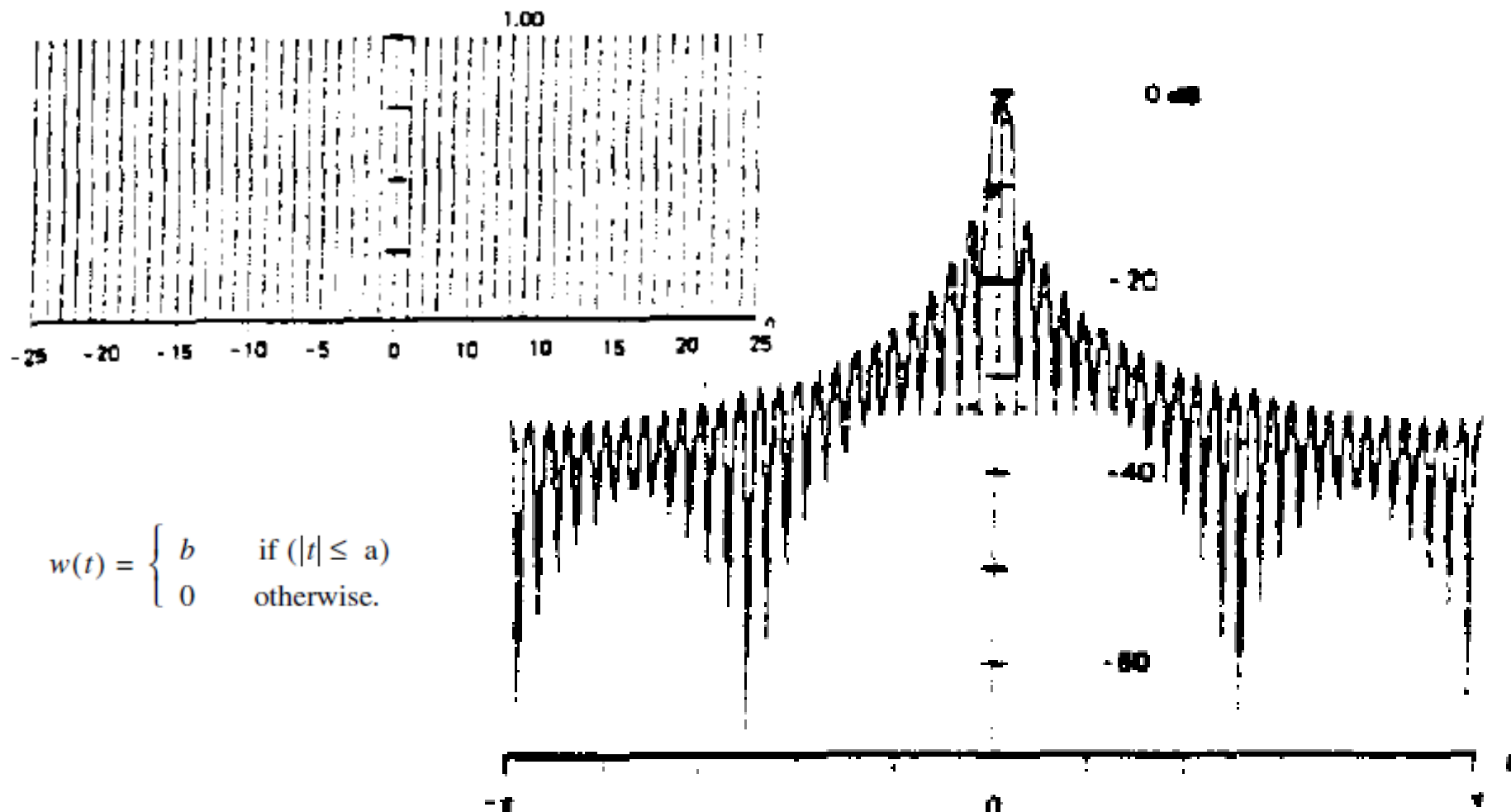


R/2 OVERLAP

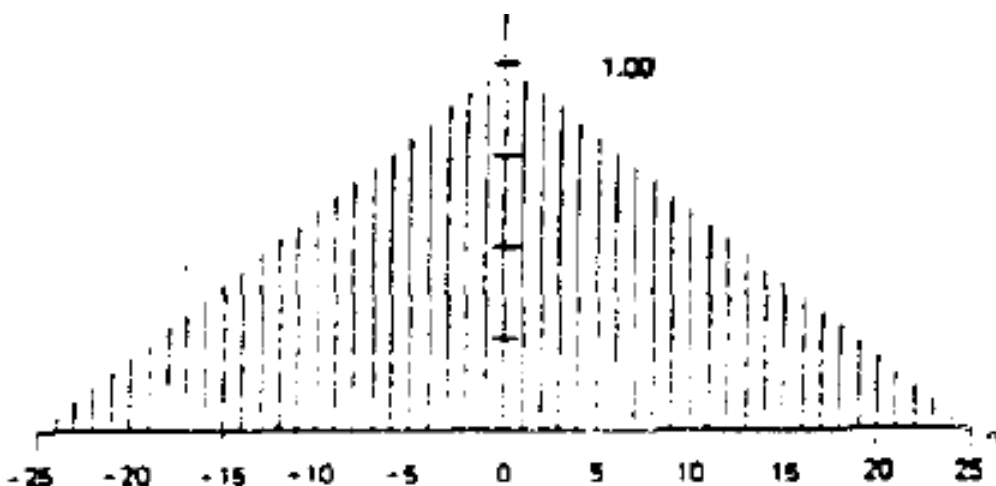


L is the number of samples between adjacent blocks.

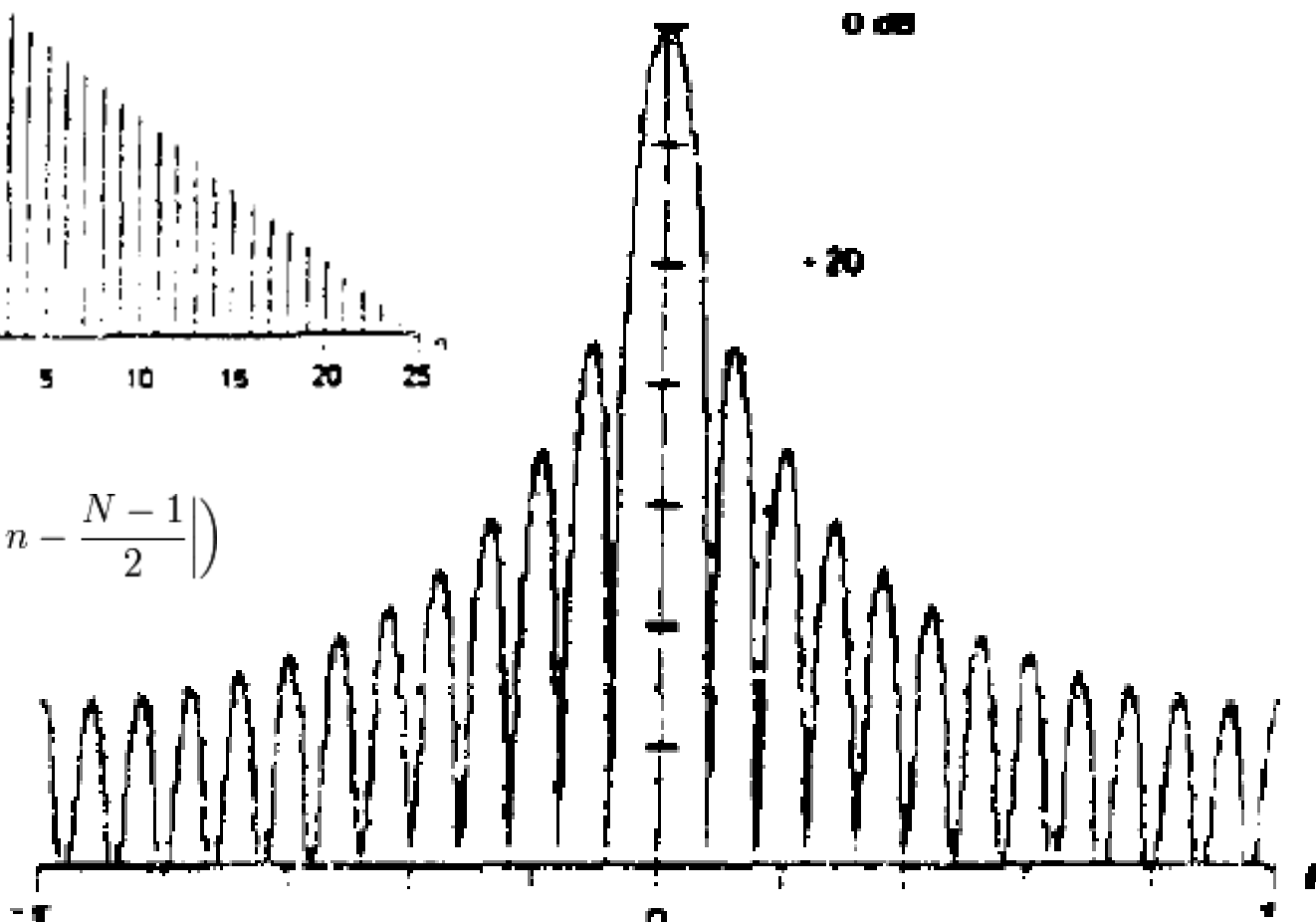
Кратковременно дискретно преобразуване на Фурие за дискретни сигнали



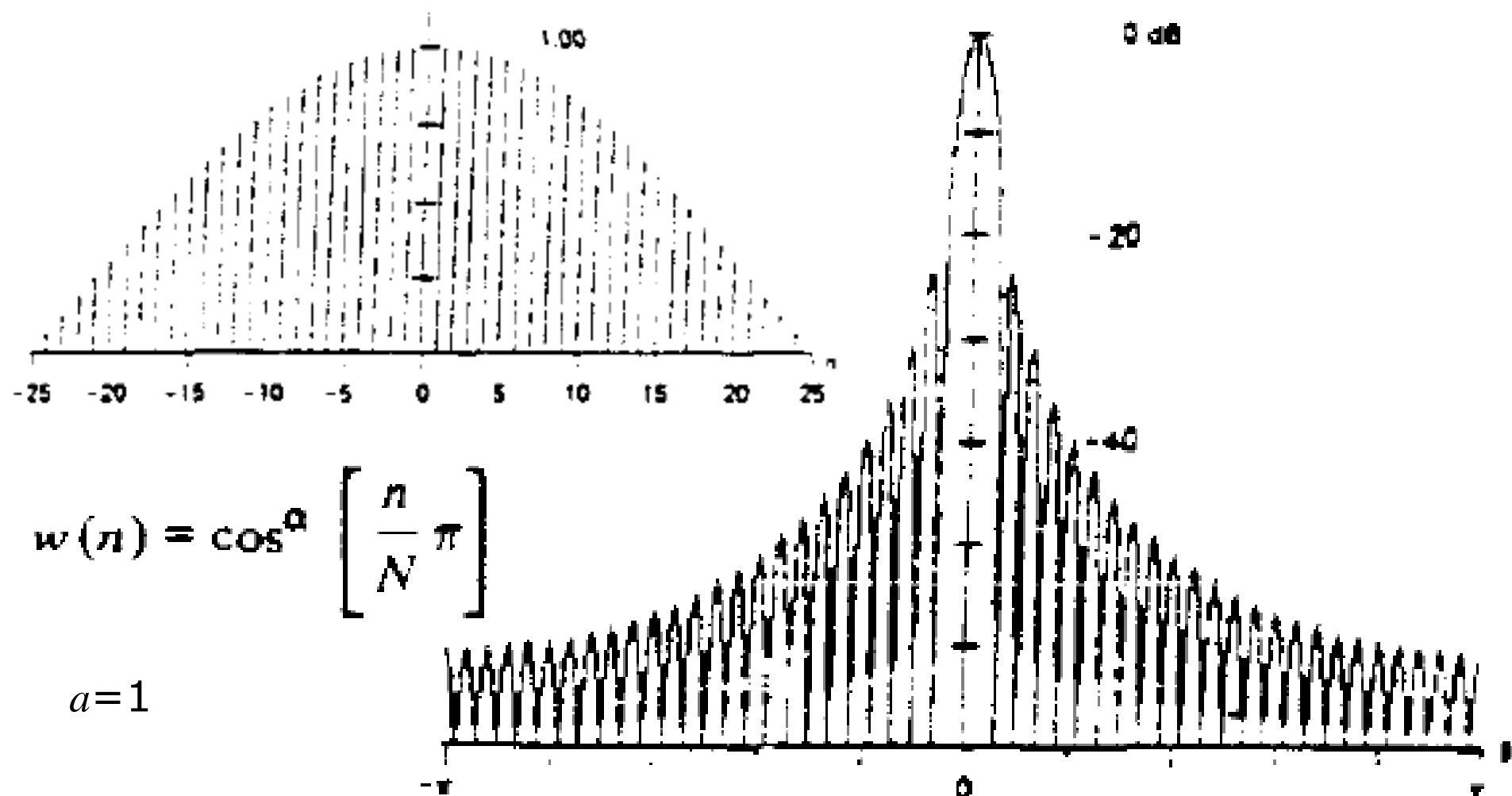
Кратковременно дискретно преобразуване на Фурие за дискретни сигнали



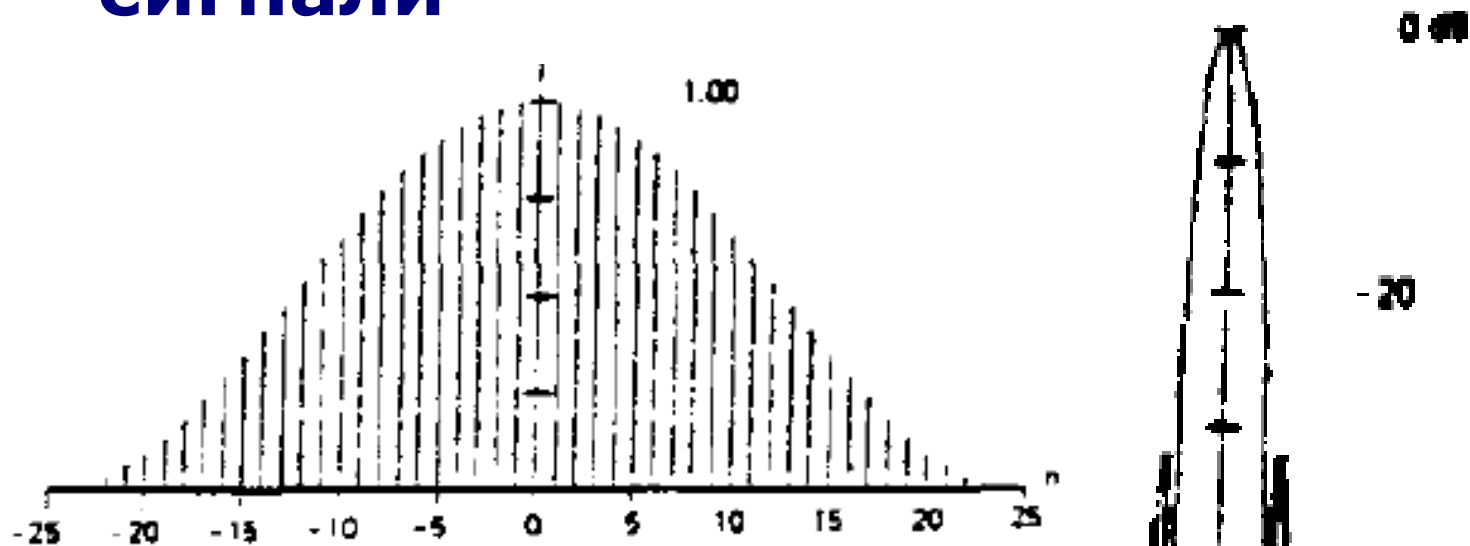
$$w(n) = \frac{2}{N-1} \cdot \left(\frac{N-1}{2} - \left| n - \frac{N-1}{2} \right| \right)$$



Кратковременно дискретно преобразуване на Фурие за дискретни сигнали

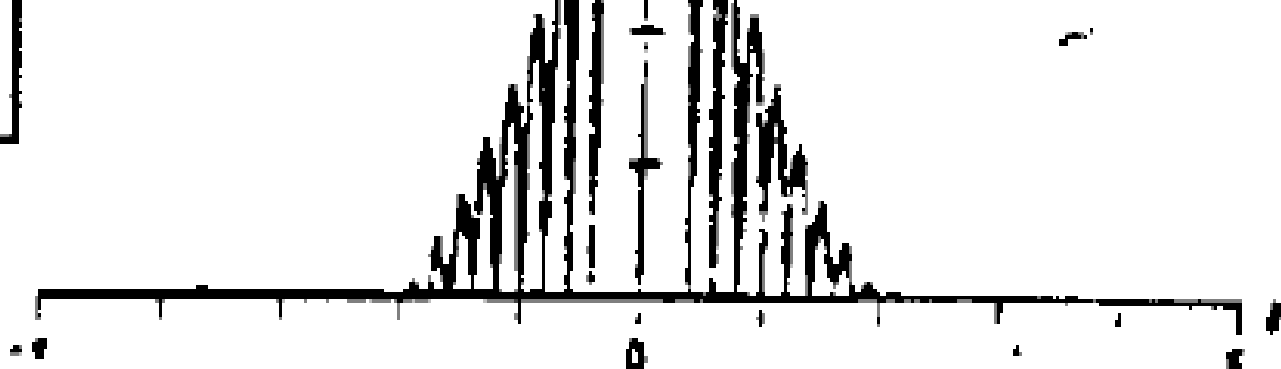


Кратковременно дискретно преобразуване на Фурие за дискретни сигнали

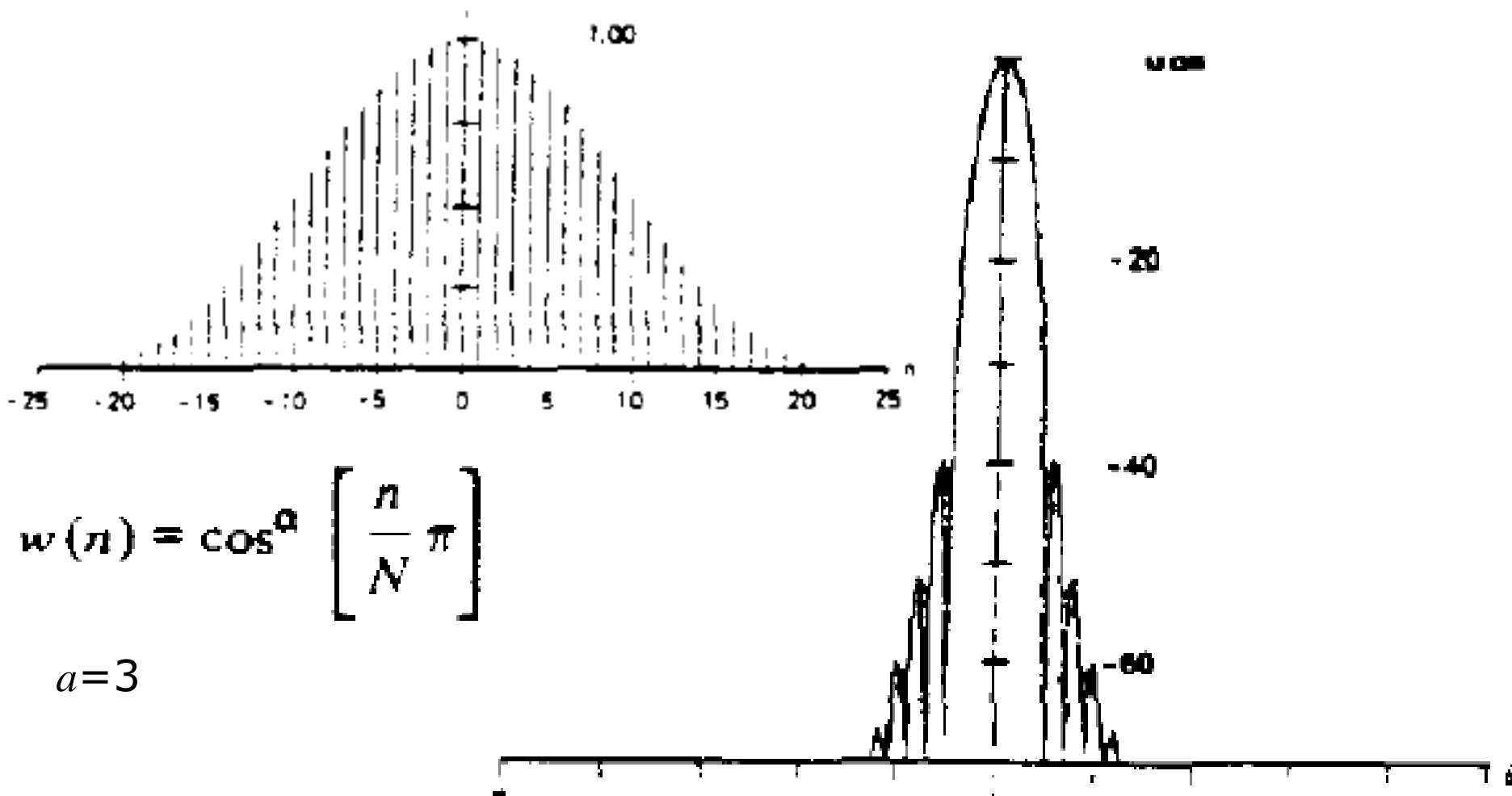


$$w(n) = \cos^a \left[\frac{n}{N} \pi \right]$$

$$a=2$$



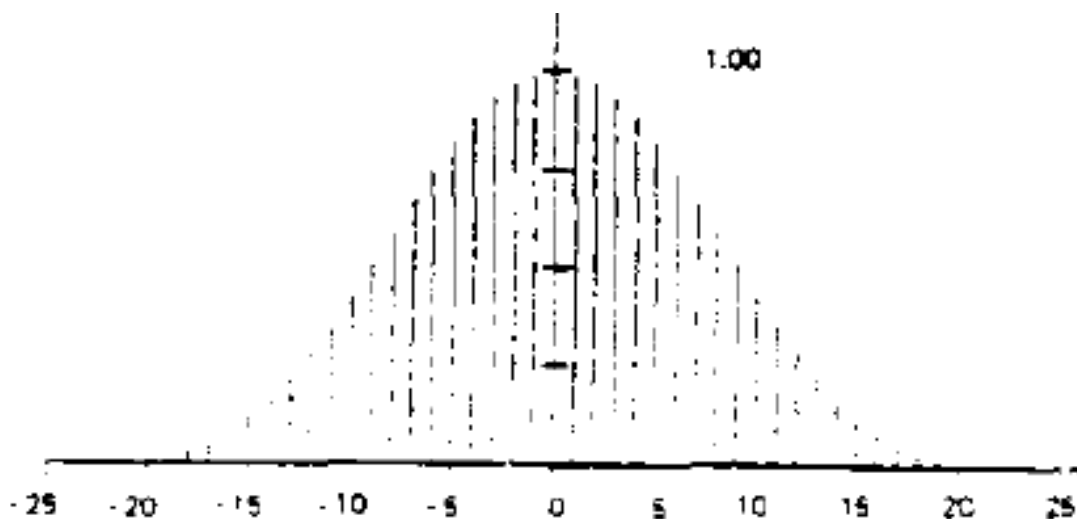
Кратковременно дискретно преобразуване на Фурие за дискретни сигнали



$$w(n) = \cos^a \left[\frac{n}{N} \pi \right]$$

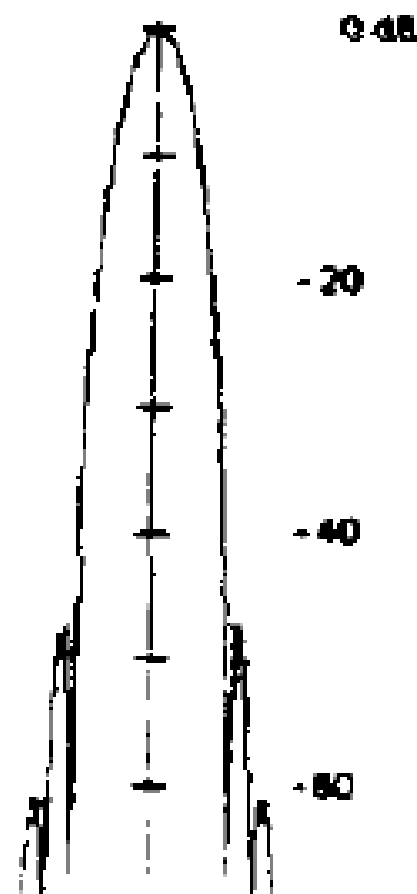
$$a=3$$

Кратковременно дискретно преобразуване на Фурие за дискретни сигнали

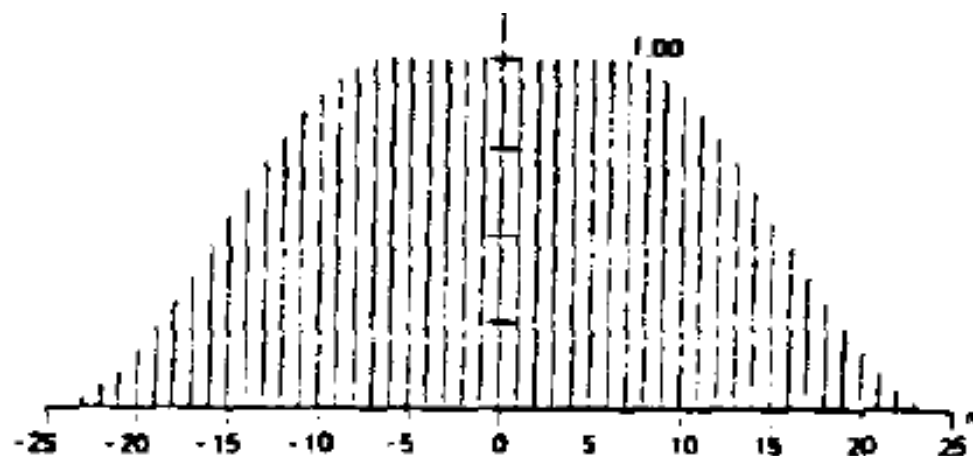


$$w(n) = \cos^a \left[\frac{n}{N} \pi \right]$$

$$a=4$$

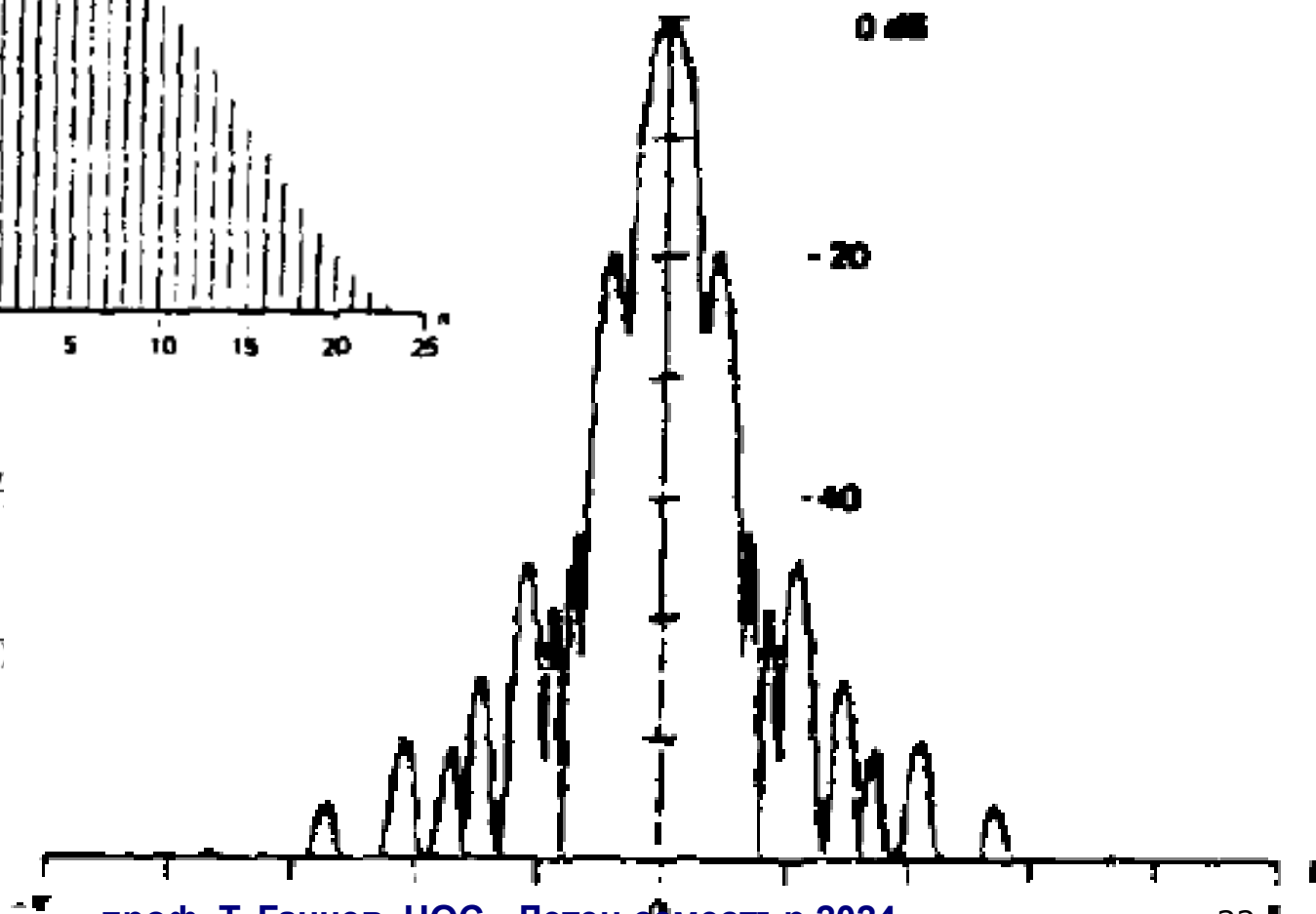


Кратковременно дискретно преобразуване на Фурие за дискретни сигнали

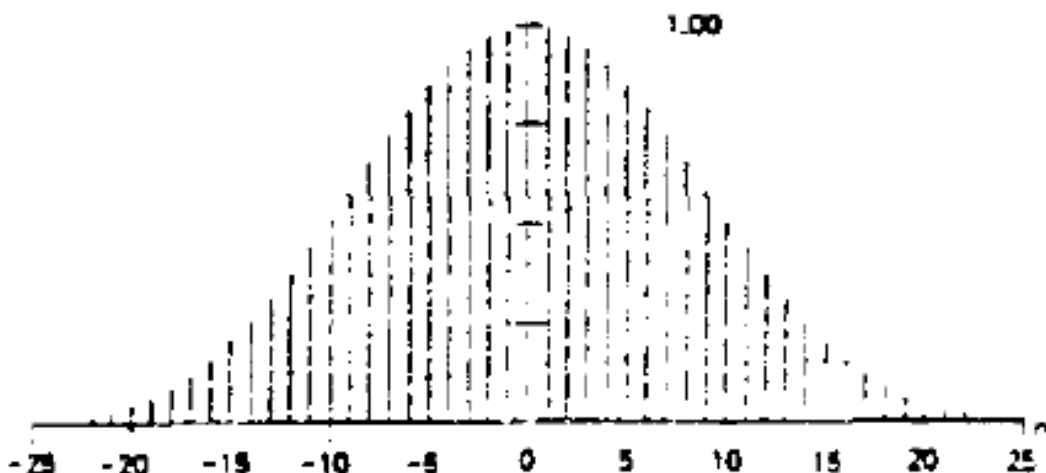


$$w(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\pi \left(\frac{2n}{\alpha(N-1)} \right) \right) \right] & \text{for } |n| \leq \frac{\alpha(N-1)}{2} \\ 1 & \text{for } |n| > \frac{\alpha(N-1)}{2} \end{cases}$$

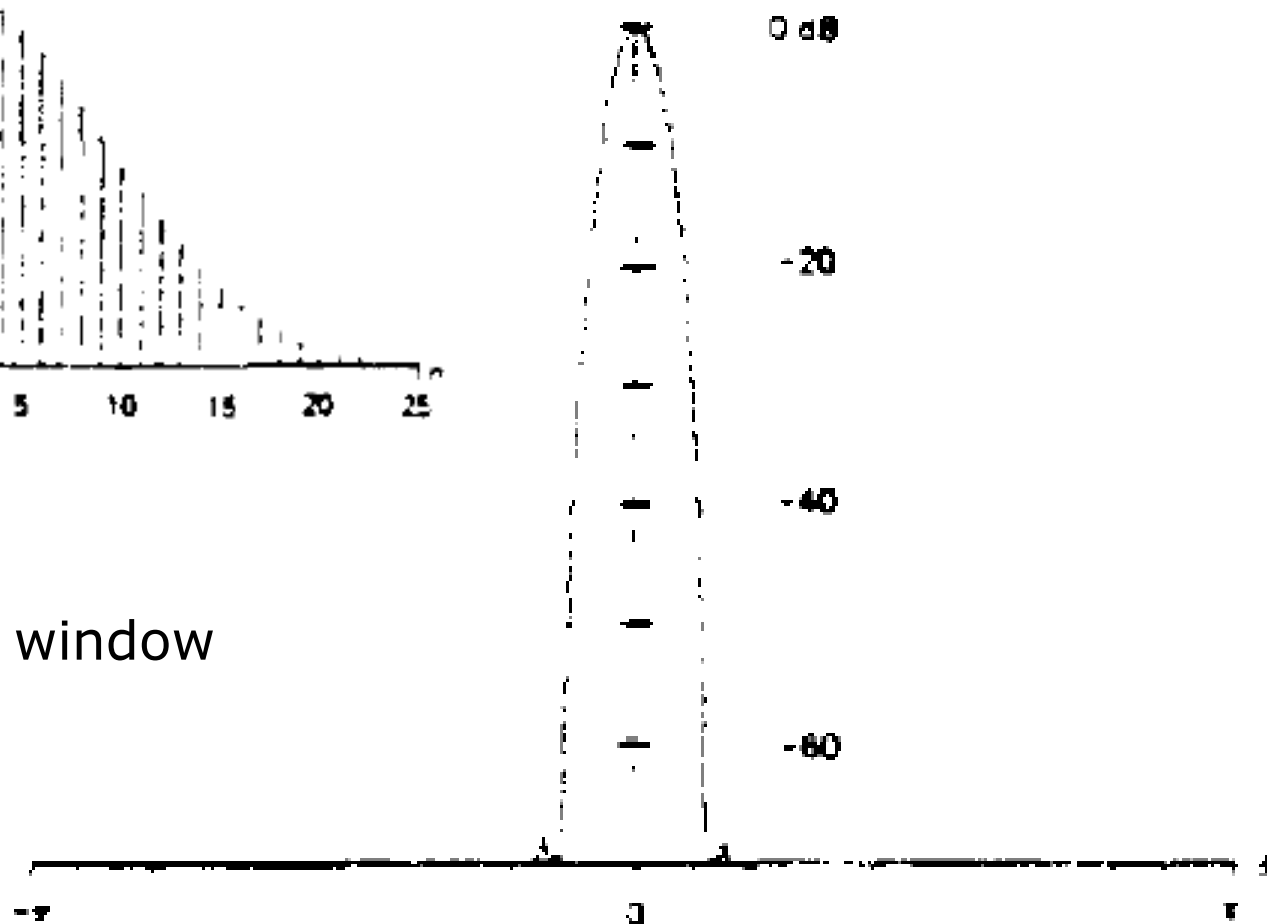
Tukey windows



Кратковременно дискретно преобразуване на Фурие за дискретни сигнали



4-sample Kaiser-Bessel window





Кратковременно дискретно преобразуване на Фурие за дискретни сигнали

Информация относно видовете прозоречни функции и техните свойства

PROCEEDINGS OF THE IEEE, VOL. 66, NO. 1, JANUARY 1978

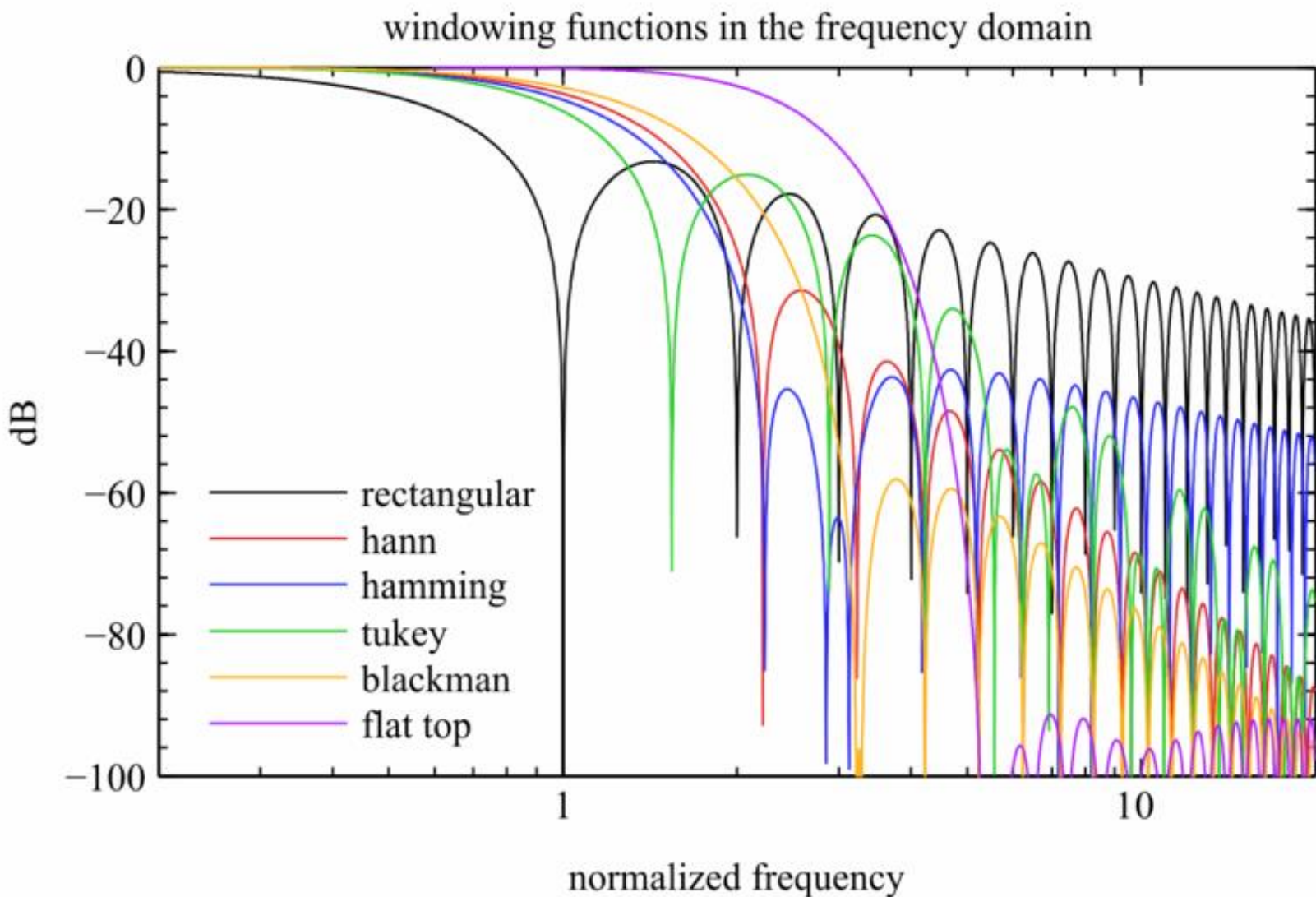
On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform

FREDRIC J. HARRIS, MEMBER, IEEE

а също и

http://en.wikipedia.org/wiki/Window_function

Кратковременно дискретно преобразуване на Фурие за дискретни



WINDOW	HIGHEST SIDE- LOBE LEVEL (dB)	SIDE LOBE FALL- OFF (dB/OCT)	COHERENT GAIN
RECTANGLE	-13	-6	1.00
TRIANGLE	-27	-12	0.50
$\cos^2(x)$ $\alpha = 1.0$	-23	-12	0.64
HANNING $\alpha = 2.0$	-32	-18	0.50
$\alpha = 3.0$	-39	-24	0.42
$\alpha = 4.0$	-47	-30	0.38
HAMMING	-43	-6	0.54
RIESZ	-21	-12	0.67
RIEMANN	-26	-12	0.59
DE LA VALLE- POUSSIN	-53	-24	0.38
TUKEY $\alpha = 0.25$	-14	-18	0.88
$\alpha = 0.50$	-15	-18	0.75
$\alpha = 0.75$	-19	-18	0.63
BOHMAN	-46	-24	0.41
POISSON $\alpha = 2.0$	-19	-6	0.44
$\alpha = 3.0$	-24	-6	0.32
$\alpha = 4.0$	-31	-6	0.25
HANNING- POISSON $\alpha = 0.5$	-35	-18	0.43
$\alpha = 1.0$	-39	-18	0.38
$\alpha = 2.0$	NONE	-18	0.29

CAUCHY	$\alpha = 3.0$	-31	-6	0.42
	$\alpha = 4.0$	-35	-6	0.33
	$\alpha = 5.0$	-30	-6	0.28
GAUSSIAN	$\alpha = 2.5$	-42	-6	0.51
	$\alpha = 3.0$	-55	-6	0.43
	$\alpha = 3.5$	-69	-6	0.37
DOLPH CHEBYSHEV	$\alpha = 2.5$	-50	0	0.53
	$\alpha = 3.0$	-60	0	0.48
	$\alpha = 3.5$	-70	0	0.45
	$\alpha = 4.0$	-80	0	0.42
KAISER BESSEL	$\alpha = 2.0$	-46	-6	0.49
	$\alpha = 2.5$	-57	-6	0.44
	$\alpha = 3.0$	-69	-6	0.40
	$\alpha = 3.5$	-82	-6	0.37
BARCILON- TEMES	$\alpha = 3.0$	-53	-6	0.47
	$\alpha = 3.5$	-58	-6	0.43
	$\alpha = 4.0$	-68	-6	0.41
EXACT BLACKMAN		-51	-6	0.46
BLACKMAN		-58	-18	0.42
MINIMUM 3-SAMPLE BLACKMAN-HARRIS		-67	-6	0.42
* MINIMUM 4-SAMPLE BLACKMAN-HARRIS		-92	-6	0.36
* 61 dB 3-SAMPLE BLACKMAN-HARRIS		-61	-6	0.45
74 dB 4-SAMPLE BLACKMAN-HARRIS		-74	-6	0.40
4-SAMPLE $\alpha = 3.0$ KAISER-BESSEL		-69	6	0.40

Възможни въпроси за изпита

- В какво се изразява разликата между дискретното преобразуване на Фурие и кратковременното дискретното преобразуване на Фурие?
- Каква е разликата между преобразуването на Gabor и кратковременното дискретното преобразуване на Фурие?
- В какво се изразява ограничението на Gabor за разделителната способност на време-честотния анализ?
- Кои са трите най-важни параметри при сравняването на различни прозоречни функции (напр. триъгълен, правоъгълен, прозорец на Hann, на Hamming, на Kaiser, и др.)?