

Цифрова обработка на сигнали

*Тема #9: Преобразуване на Лаплас.
Z-преобразуване. Z-предавателна
характеристика на ДЛИВ системи*



Съдържание

Преобразуване на Лаплас

Z-преобразуване

Свойства на Z- преобразуването за редици

Z-предавателна функция на ДЛИВ системи

Зависимост м/у стабилността на ДЛИВ система и позициите на полюсите и нулите на Z-предавателната характеристика



Въведение

От досега разгледаните два основни метода на цифровата обработка на сигнали, *линейна конволюция* и *Фурие анализ*, се изясни, че ДЛИВ система може да бъде изцяло дефинирана посредством импулсната си или честотната си характеристики.

При проектиране на дискретни системи, в т.ч.:

- Електрически вериги,
- Разпространение на вълните,
- Постъпателно или въртеливо движение,
- Електро-магнитни полета,
- Теплообмен, и др.

се изисква решаването на разликови уравнения, при което импулсната характеристика се състои само от експоненти и синусоиди. Анализ на устойчивостта се извършва чрез z -преобразуване.

При създаване на аналогови системи (които обработват непрекъснати сигнали) се изисква решаването на диференциални уравнения. За анализ на устойчивостта се използва преобразуване на Лаплас.



Преобразуване на Лаплас

Преобразуването на Лаплас е математически инструмент за решаване на диференциални уравнения, който е позволява анализ на системи обработващи непрекъснати сигнали.

Всъщност, преобразуването на Лаплас е създадено за нуждите на специален клас от непрекъснати във времето сигнали, импулсните характеристики на които се състоят от само от синусоиди и експоненти.

Исторически сведения за маркиз Лаплас



Pierre Simon De Laplace
(1749-1827)

Преобразуване на Лаплас

Нека отново си припомним как точно отделните точки в честотната област (преобразуване на Фурие) се свързват с времевия сигнал:

- Всяка точка в честотната област, с определена стойност на ω , отговаря на две синусоиди, $\cos(\omega t)$ и $\sin(\omega t)$.
- Реалната част на сигнала се намира чрез умножаването на времевия сигнал с косинус и интегриране от $-\infty$ до $+\infty$.
- Имагинерната част се намира по сходен начин като се използва функцията синус.

При използването на **комплексното преобразуване на Фурие**, стойностите отговарящи на отрицателните честоти, $-\omega$, ще представляват комплексно спрегнатите (същата реална част, но отрицателна имагинерна) като стойностите за ω .

Преобразуването на Лаплас може да се разглежда като разширение на тези същите концепции.

преобразуване на Лаплас

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

преобразуването на Лаплас преобразува непрекъснат във времето сигнал във съответно представяне в s-областта (**s-domain**), която се нарича още s-равнина (**splane**).

преобразуването на Лаплас е валидни за безкрайни във времето сигнали които се простират от – до + безкрайност, които могат да бъдат периодични или непериодични.

преобразуването на Лаплас се счита за едно от най-важните уравнения в областта на обработката на сигнали и в електрониката.

преобразуване на Лаплас

Така както преобразуването на Фурие представя даден сигнал като набор от синусоиди, така преобразуването на Лаплас представя сигнала като набор от синусоиди и експоненти.

От математическа гледна точка преобразуването на Фурие е частен случай на по-общото преобразуване на Лаплас.

преобразуване
на Фурие:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

преобразуване
на Laplace:

$$X(\sigma, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

Кратка форма:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Преобразуване на Лаплас

преобразуване
на Фурие:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

преобразуване
на Laplace:

$$X(\sigma, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

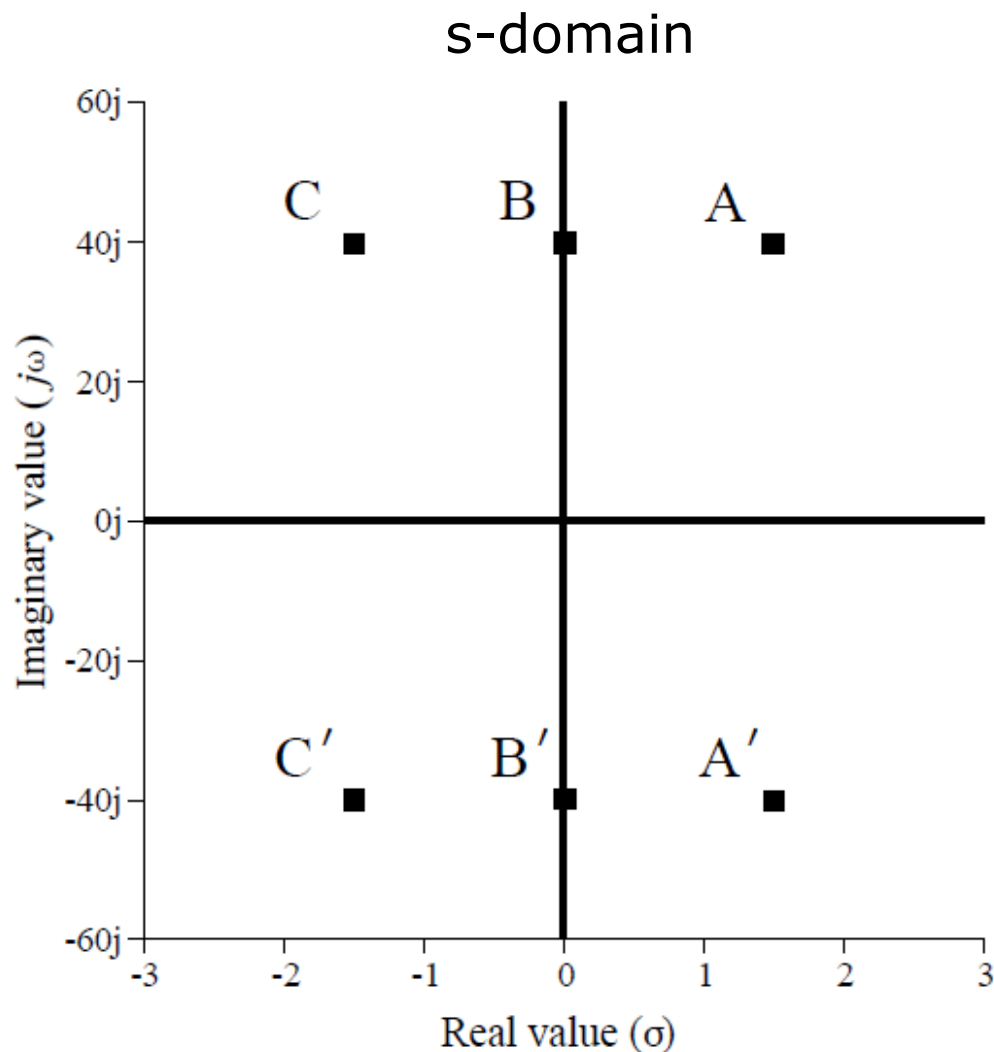
Въпреки че като цяло математическото описание на преобразуването на Лаплас е много подобно на това на Фурие преобразуването, логическата основа на двата метода е много различна:

- Фурие преобразуването корелира сигнала във времевата област с набор от *базови функции* за да разложи сигнала на честотни компоненти и да разкрие спектъра на сигнала.
- Преобразуването на Laplace сондира сигнала във времевата област за да открие основните му характеристики: *честотата* на синусоидите, и константата на спадане на експоннтите.

Преобразуване на Лаплас

s-областта е комплексна равнина при която имаме реални числа по хоризонталната ос и имагинерни числа по вертикалната ос.

Разстоянията по реалната ос се изразява посредством променливата, σ , а по имагинерната ос е естествената честота, означена с ω .



преобразуване на Лаплас

Тази координатна система позволява **позицията** на всяка точка в комплексната равнина да се дефинира еднозначно от стойностите на σ и ω . В този смисъл, използвайки означения с комплексни числа, всяка позиция може да се представи с комплексната променлива, s , където: $s = \sigma + j\omega$.

В допълнение на позицията дефинирана от комплексното число, всяка точка в s -областта има **стойност**, която е комплексно число.

Преобразуването на Лаплас позволява времето да бъде представено с комплексни числа, но това се използва рядко в обработката на сигнали. Ние разглеждаме предимно случаите, когато сигналът е представен с реални числа във времето, което удовлетворява почти всички практически приложения.

преобразуване на Лаплас

преобразуване
на Фурие:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

преобразуване
на Laplace:

$$X(\sigma, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

Кратка форма:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

При $\sigma = 0$, стойностите на функцията намиращи се на вертикалната ос от s-равнината съвпадат с стойностите на Фурие преобразуването на времевия сигнал.

преобразуване на Лаплас

Разширения запис на преобразуването на Лаплас

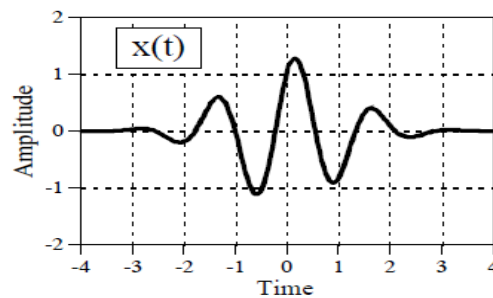
$$X(\sigma, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

може да бъде записано също и като

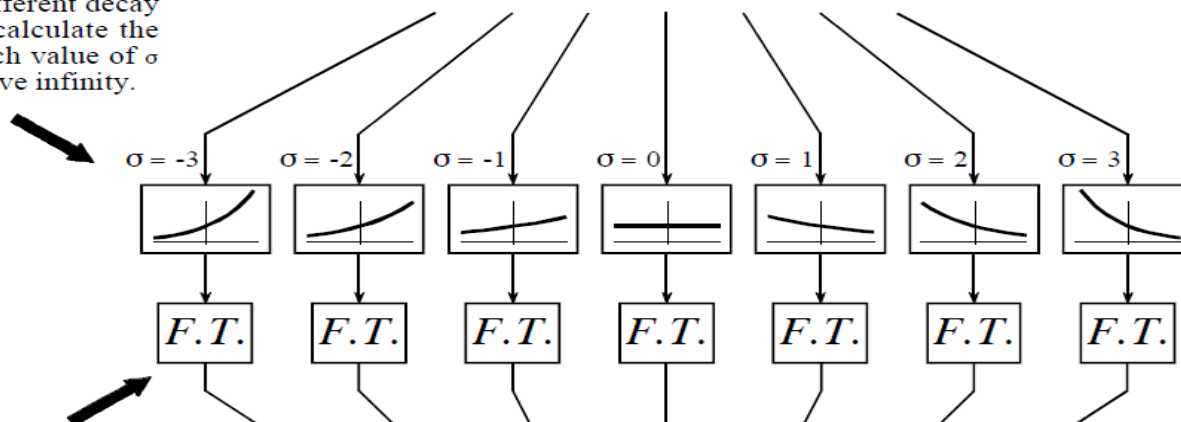
$$X(\sigma, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt$$

където комплексната експонента може да се раздели на две експоненти. По такъв начин, за да се изчислят стойностите по вертикалната линия в s -равнината (стойностите за определена стойност на σ), сигнала във времевата област първо се умножава с експоненциалната крива: $e^{-\sigma t}$

STEP 1
Start with the time domain signal called $x(t)$



STEP 2
Multiply the time domain signal by an infinite number of exponential curves, each with a different decay constant, σ . That is, calculate the signal: $x(t) e^{-\sigma t}$ for each value of σ from negative to positive infinity.

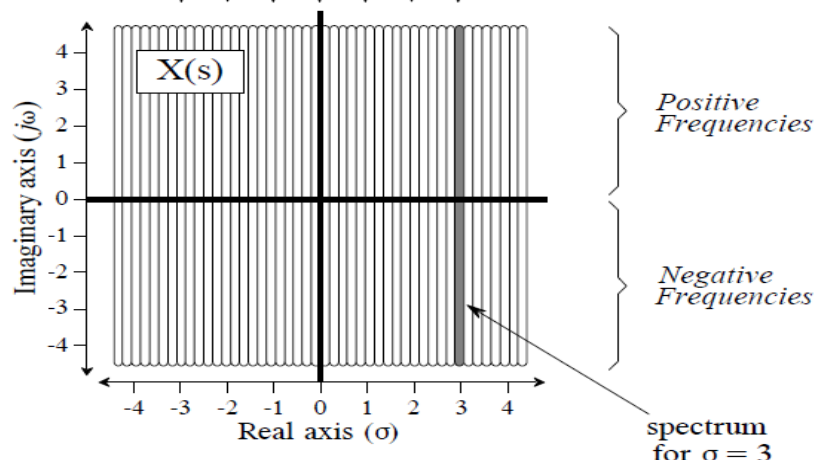


STEP 3
Take the complex Fourier Transform of each exponentially weighted time domain signal. That is, calculate:

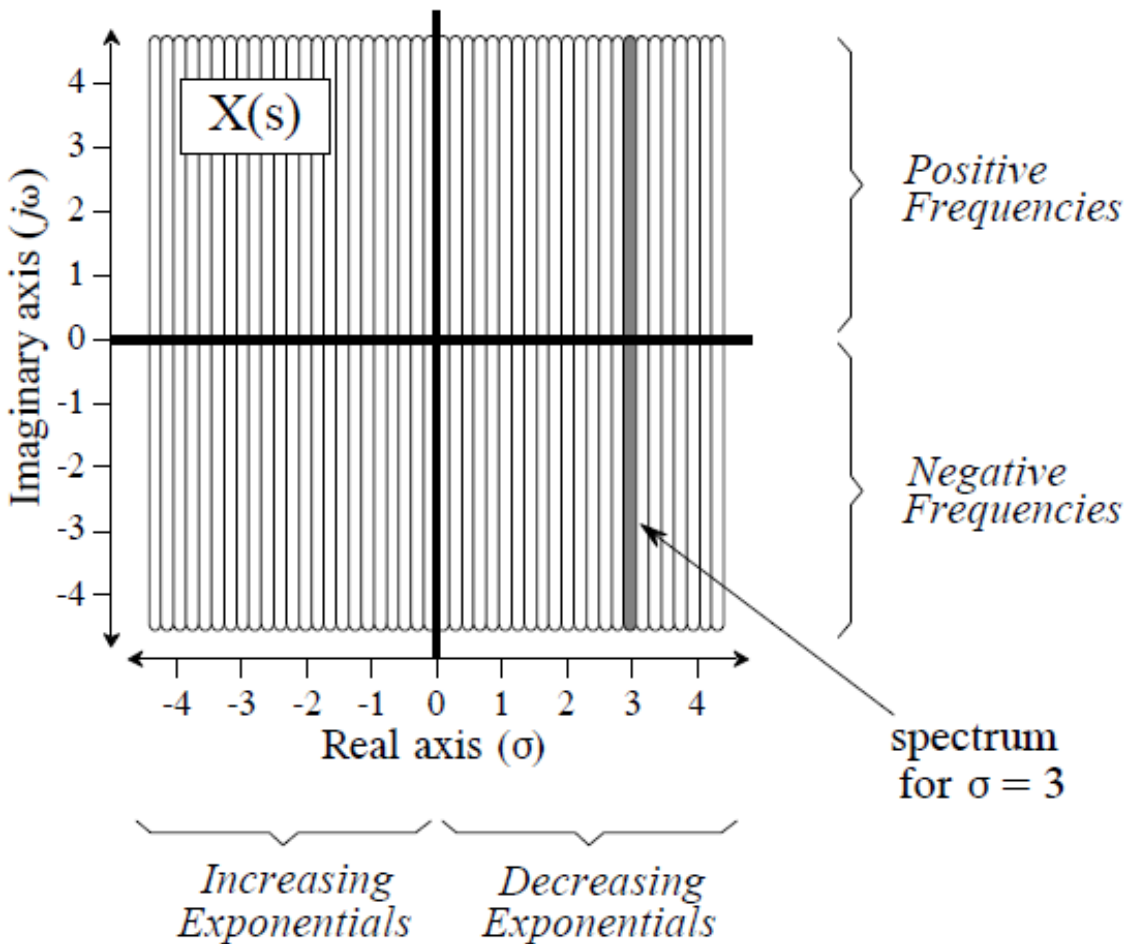
$$\int_{-\infty}^{\infty} [x(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt$$

for each value of σ from negative to positive infinity.

STEP 4
Arrange each spectrum along a vertical line in the s-plane. The positive frequencies are in the upper half of the s-plane while the negative frequencies are in the lower half.



Преобразуване на Лаплас



Лявата половина на s -равнината умножава сигналите от времевата област с експоненти които нарастват по амплитуда във времето ($\sigma < 0$), а тези в дясната половина с експоненти които намаляват по амплитуда с времето ($\sigma > 0$).

Когато времевия сигнал се състои изцяло от реални стойности, горната половина от s -равнината е огледалния образ на долната половина.

Преобразуване на Лаплас

Дефиницията на преобразуването на Лаплас

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Описва как да се изчисли всяка точка в s -равнината (идентифицирана от стойностите на σ и ω) основавайки се на стойностите на σ , ω , и времевия сигнал, $x(t)$.

Използването на преобразуването на Фурие за едновременно изчисляване на всички точки (стойности) от вертикалната ос на само за удобство, а не е изискване.

Обаче, важно е да се помни че стойностите в s -равнината по протежение на оста y ($\sigma=0$) са идентични на стойностите получени от Фурие преобразуването. Това е основен фактор за да намери преобразуването на Лаплас широко приложение в практиката.

Съдържание

- преобразуване на Лаплас
- Z-преобразуване
- Свойства на Z- преобразуването за редици
- Z-предавателна функция на ДЛИВ системи
- Зависимост м/у стабилността на ДЛИВ система и позициите на полюсите и нулите на Z-предавателната характеристика

Исторически сведения А. Моуър



Abraham de Moivre (1667-1754)

Z-преобразуване

Z-преобразуването преобразува дискретен във времето сигнал, който може да бъде редица от реални или комплексни числа, в комплексен спектър в честотната област.

За разлика от преобразуването на Фурие, уейвлет преобразуването и преобразуването на Лаплас, Z-преобразуването само по себе си не е инструмент за анализ на сигналите.

Z-преобразуването не предлага никакви нови прозрения относно същността на сигналите, но осигурява удобен инструментариум за проектирането и поведението на цифрови системи.

Z-преобразуване

Въпреки това, Z-преобразуването е основният инструмент на цифровата обработка на сигнали понеже:

- Позволява решаване на разликови уравнения с постоянни коефициенти като алгебрични уравнения (това е всъщност мотивацията за създаване на Z-преобразуването).
- Има близка асоциация с преобразуването на Фурие за дискретни във времето сигнали, DTFT, което предоставя възможността за дефинирането на ясни критерии за стабилност при проектирането и използването на цифрови филтри.



Z-преобразуване

Z-преобразуването е особено полезно за анализ на ДЛИВ системите в z-областта, и в частност за преобразуването на коефициентите на филтрите в Z-предавателната функция и обратно.

Главното приложение на Z-преобразуването е използването му като основен инструмент при анализ и проектиране на дискрени системи

Z-преобразуването е близко свързано с преобразуването на Лаплас може да се разглежда като негов аналог за дискретни сигнали. За да подкрепим това твърдение и да покажем че двете преобразувания са паралелни техники ще покажем как можем да преминем от преобразуването на Лаплас към Z-преобразуването.

Z-преобразуване

От преобразуването на Лаплас може да се премине към Z-преобразуването в три стъпки.

$$X(s) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad \& \quad X(\sigma, \omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

Първата стъпка е най-очевидната: преминаваме от непрекъснат към дискретен сигнал. Това се извършва посредством замяната на променливата на времето, t , с поредния номер на отчета, n , и промяна на интеграла в сума:

$$X(\sigma, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-\sigma n} e^{-j\omega n}$$

Нека да отбележим че $X(\sigma, \omega)$ е непрекъснатата функция а не дискретна. Въпреки че сега вече обработваме дискретен във времето сигнал, $x(n)$, параметерите σ и ω все още могат да приемат целия обхват от непрекъснати стойности.

Z-преобразуване

Втората стъпка е да се замени експоненциалния множител в уравнението.

Експоненциален сигнал може да се представи математически по един от следните два начина:

$$y(n) = e^{-\sigma n}$$

or

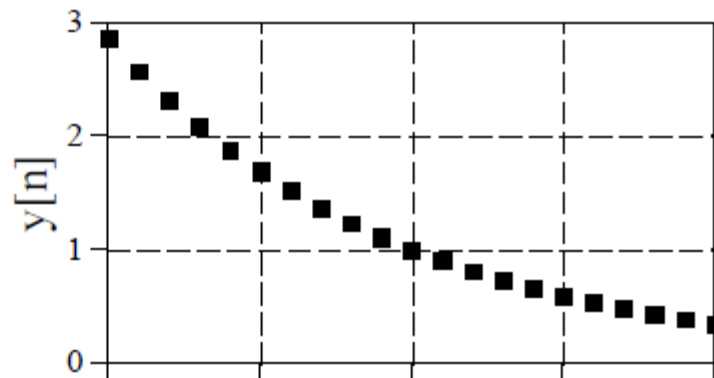
$$y(n) = r^{-n}$$

a. Decreasing

$$y[n] = e^{-\sigma n}, \sigma = 0.105$$

or

$$y[n] = r^{-n}, r = 1.1$$

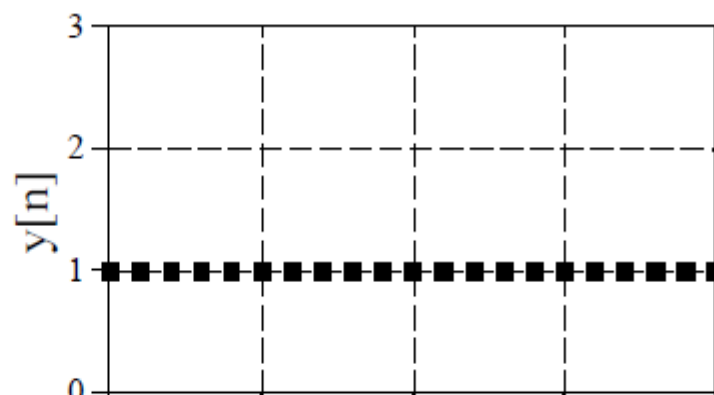


b. Constant

$$y[n] = e^{-\sigma n}, \sigma = 0.000$$

or

$$y[n] = r^{-n}, r = 1.0$$

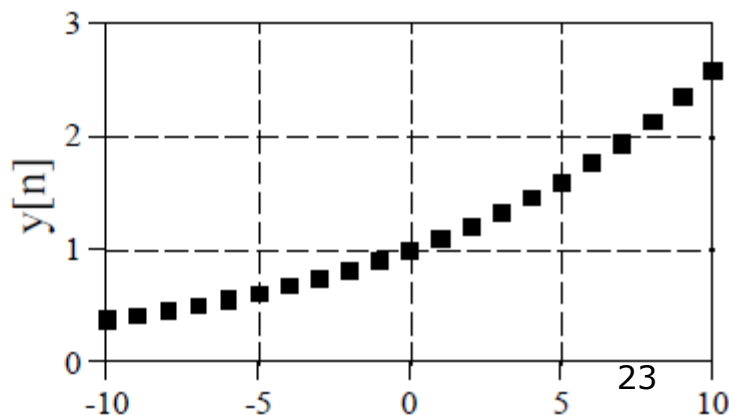


c. Increasing

$$y[n] = e^{-\sigma n}, \sigma = -0.095$$

or

$$y[n] = r^{-n}, r = 0.9$$



Z-преобразуване

Втория израз $y(n) = r^{-n}$ използва параметъра, r , за да се контролира изменението на амплитудата на сигнала.

Амплитудата намалява когато $r > 1$, или се увеличава когато $r < 1$. Сигналят ще има неизменна амплитуда при $r = 1$.

$$y(n) = e^{-\sigma n} \quad \text{и} \quad y(n) = r^{-n}$$

Тези уравнения са два различни начина за изразяване на един и същ ефект и могат да се заменят използвайки връзката:

$$r^{-n} = \left[e^{\ln(r)} \right]^{-n} = e^{-n \ln(r)} = e^{-\sigma n}$$

където

$$\sigma = \ln(r)$$

Z-преобразуване

Така втората стъпка от преобразуването на Лаплас в Z-преобразуването завършва с използването на *другата форма на експоненциалният член*:

$$X(r, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\omega n}$$

Z-преобразуване

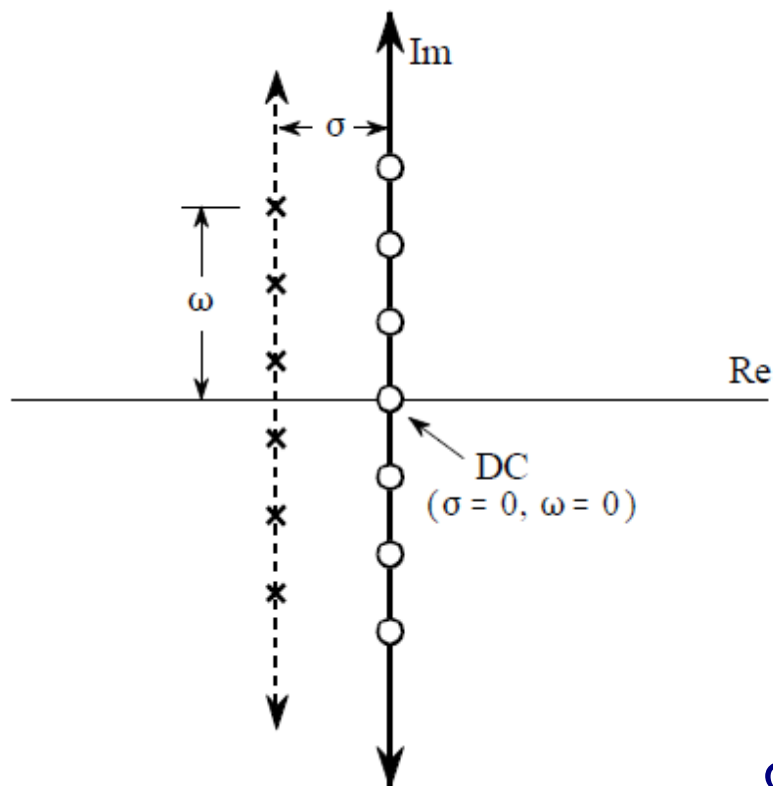
За облекчаване на обозначенията въвеждаме нова променлива $z = r e^{j\omega}$, която съответства на обозначението в полярни координати на комплексната променлива $s = \sigma + j\omega$ (функция на реалните променливи σ и ω) в преобразуването на Лаплас.

Така че, третата стъпка от преминаването към Z-преобразуването е да се замени $r e^{j\omega}$ със z . Това довежда до стандартната двустранна форма на Z-преобразуването:

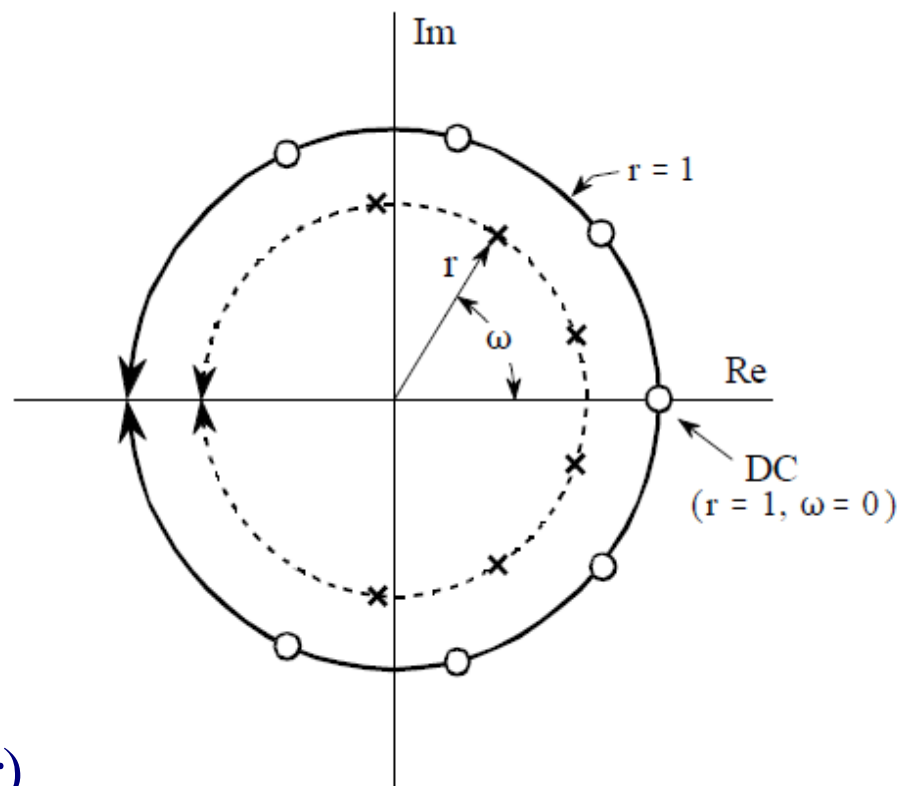
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

Z-преобразуване

s-plane



z-plane



$$\sigma = \ln(r)$$

Z-преобразуване

Вертикалната ос в s -равнината (т.е. при $\sigma=0$) отговаря на *единичната окръжност* в z -равнината.

Вертикалните линии в лявата половина на s -равнината отговарят на окръжности *вътре в единичната окръжност* в z -равнината.

Вертикалните линии в дясната половина на s -равнината отговаря на окръжности *извън единичната окръжност* от z -равнината.

Аналогова система е неустойчива когато полюсите и са разположени в дясната половина на s -равнината. По същата логика, дискретна система е неустойчива когато полюсите на системата са разположени извън единичната окръжност в z -равнината.

Z-преобразуване

Когато сигналът във времевата област е изцяло реален (което е общият случай), горната и долната половини на z -равнината са огледално разположени изображения, също както и в s -равнината.

Непрекъснатата синусоида може да приеме всяка честота между постоянен сигнал (0 Hz) и безкрайност. Това означава, че s -равнината трябва да позволява ω да се изменя от $-\infty$ до $+\infty$.

Z-преобразуване

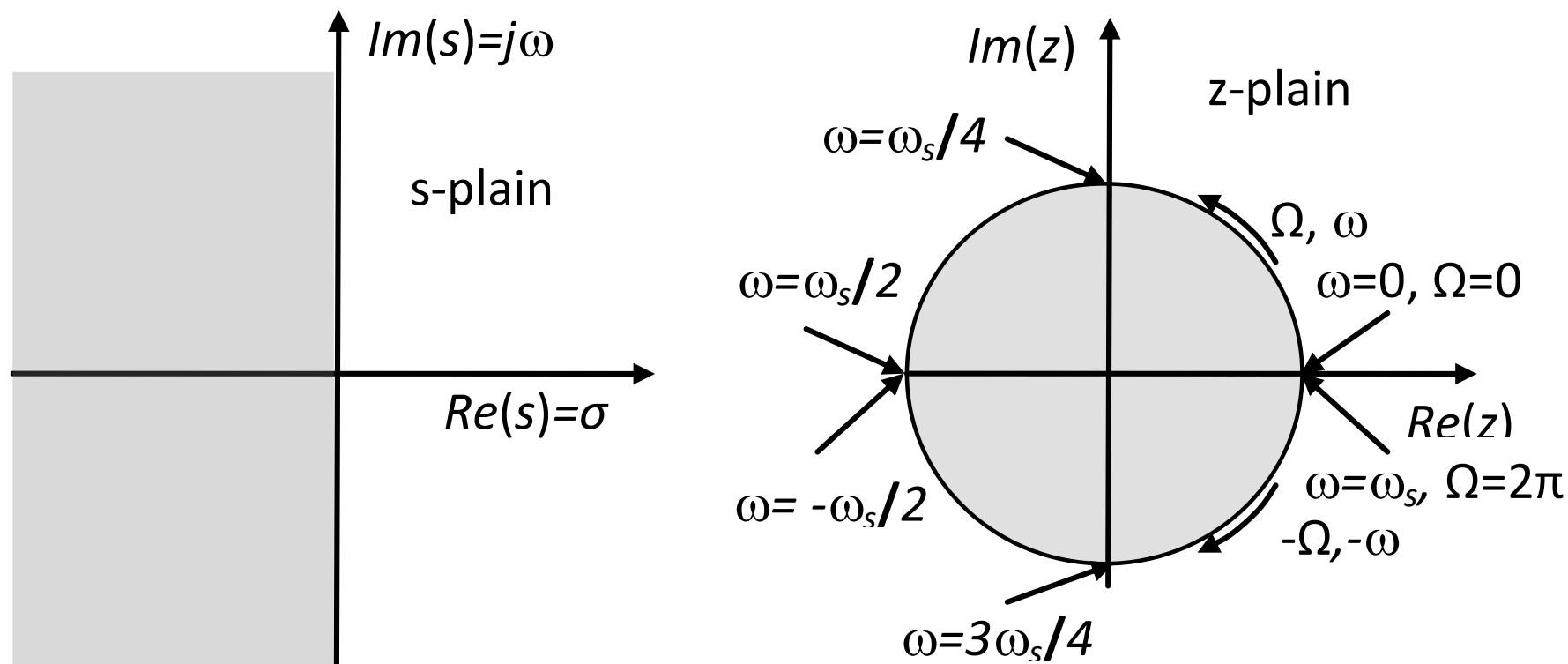
За сравнение, дискретна синусоида може да приема стойности на честотата между 0 Hz и половината от честотата на дискретизация. Така че, честотата трябва да е между 0 и 0.5 когато се изразява като дроб на честотата на дискретизация ω/ω_s . А когато се използва нормализираната честота

$$\Omega = 2\pi f / f_s,$$

е между 0 и π , което отговаря на геометрията на z-равнината и интерпретираме Ω като ъгъл изразен в радиани.

По този начин положителните честоти отговарят на ъгли между 0 и π радиана, докато отрицателните честоти отговарят на интервала между 0 и $-\pi$ радиана.

Z-преобразуване



Преобразуване на Фурие за дискретни сигнали (DTFT) и Z-преобразуване



$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

Първото уравнение показва че можем да представим всеки сигнал, $x(n)$, посредством линейна комбинация от комплексни експоненти:

$$e^{j\Omega n} = \cos(\Omega n) + j \sin(\Omega n)$$

Второто уравнение показва как да изчислим комплексните тегловни фактори, които ние наричаме спектър:

$$X(j\Omega)$$

Преминавайки от DTFT към Z-преобразуването можем да заменим $e^{j\Omega n}$ с z^n .

Преобразуване на Фурие за дискретни сигнали (DTFT) и Z-преобразуване



z^n може да се разглежда като обобщение на $e^{j\Omega n}$

За произволно z , използвайки полярни координати имаме

$z = r e^{j\Omega}$ така че

$$z^n = r^n e^{j\Omega n}$$

Ако и r и Ω са реални числа, тогава z^n може да се разглежда като комплексна експонента (т.е. синуси и косинуси) с реална обвивка на амплитудата на времевия сигнал, намаляваща или увеличаваща се.

преобразуване на Фурие за дискретни сигнали (DTFT) и Z-преобразуване



В израза за DTFT

$$X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$$

ако заменим (обобщим) комплексната експонента $e^{j\Omega n}$ с z^n ,
тогава ще получим обобщението на $X(j\Omega)$ като

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

Това може да се възприеме като считаме, че времевата функция е изградена от сумата от функциите z^n вместо сумата от комплексните експоненти $e^{j\Omega n}$

Област на сходимост на Z-преобразуването

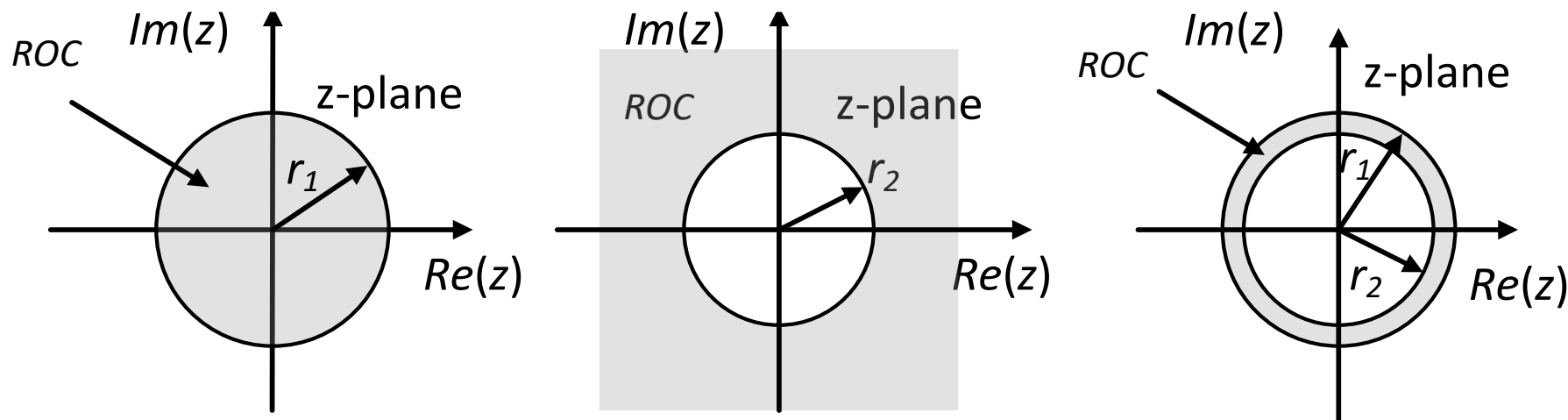
Тъй като $X(z)$ е безкрайна редица от степените на z , z -преобразуването съществува само ако редицата е сходяща се. Наборът от стойности на z за които функцията е сходяща, т.е. За които получава крайна стойност, се нарича регион на сходимост (*Region of Convergence, ROC*).

Сходимостта на Z -преобразуването $X(z)$ зависи от сумата

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) r^{-n}| < \infty.$$

Областта на сходимост за сумата от произведения за отрицателни стойности на n , ако съществува, се намира изцяло в окръжност с радиус $r_1 < \infty$, за неотрицателните стойности на n , ако съществува, е извън окръжност с радиус r_2 .

Област на сходимост на Z-преобразуването



Наборът от стойности на z за които функцията е сходяща, т.е. За които получава крайна стойност, се нарича област на сходимост (*Region of Convergency, ROC*).

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n) z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| \cdot |z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| \cdot r^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{|x(n)|}{r^n} < \infty$$

Областта на сходимост за сумата от произведения за отрицателни стойности на n , ако съществува, се намира изцяло в окръжност с радиус $r_1 < \infty$.



Област на сходимост на Z-преобразуването

Една ДЛИВ система е устойчива, ако полюсите на z -предавателната функция са разположени вътре в кръг с център в началото на координатната система на z -равнината и с радиус $r=1$.

Положението на нулите не влияе директно върху устойчивостта на системата.

Обратно Z-преобразуване

Обратното z-преобразуване позволява възстановяването на редицата $x(n)$ от нейното z-образ $X(z)$ ако той е известен

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

където C е затворен контур в границите на областта на сходимост на $X(z)$, която включва началото на координатната система.

Този интеграл се изчислява по контура C в посока обратна на движението на часовниковата стрелка.

Обратно Z-преобразуване

В практиката най-често се използват z-образи които са представени като рационални функции.

(Типичен пример е z-предавателната функция за каузална ДЛИВ система).

В тези случаи обратното Z-преобразуване може да се изчисли по един от следните методи:

- ❑ Метод с разлагане с ред на Тейлър,
- ❑ Метод с разлагане на елементарни дроби,
- ❑ Метод с използване на резидиумите.

Съдържание

- Преобразуване на Лаплас
- Z-преобразуване
- Свойства на Z-преобразуването за редици
- Z-предавателна функция на ДЛИВ системи
- Зависимост м/у стабилността на ДЛИВ система и позициите на полюсите и нулите на Z-предавателната характеристика

Свойства на Z-преобразуването

Линейност:

$$Z\left\{\sum a_k x_k(n)\right\} = \sum a_k Z\{x_k(n)\} = \sum a_k X_k(z)$$

Изместване във времето:

$$Z\{x(n-k)\} = X(z) z^{-k}$$

Диференциране:

$$Z\{nx(n)\} = -z \frac{dX(z)}{dz}$$

Свойства на Z-преобразуването

Обръщане на времето:

$$x(-n) \longleftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right).$$

Мащабиране/Модулация:

$$a^n x(n) \longleftrightarrow X\left(\frac{z}{a}\right).$$

Конволюция:

ако $y(n)=h(n)*x(n)$, то $Y(z)=H(z) X(z)$

при условие че $Y(z)$, $X(z)$ и $H(z)$ имат общи части от областта на сходимост в z -равнината.

Свойства на Z-преобразуването

■ Първа разлика:

$$Z\{x(n) - x(n-1)\} = (1 - z^{-1})X(z)$$

■ Умножение във времевата област:

$$x_1(n)x_2(n) \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi} \oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$$

■ Равенство на Парсивал:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n)x_2^*(n) \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi} \oint_C X_1(v)X_2^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv$$

Z-преобразуване за някои сигнали



| | Signal, $x[n]$ | Z-transform, $X(z)$ | ROC |
|---|----------------------|------------------------------------|-----------------------|
| 1 | $\delta[n]$ | 1 | all z |
| 2 | $\delta[n - n_0]$ | z^{-n_0} | $z \neq 0$ |
| 3 | $u[n]$ | $\frac{1}{1 - z^{-1}}$ | $ z > 1$ |
| 4 | $e^{-\alpha n} u[n]$ | $\frac{1}{1 - e^{-\alpha} z^{-1}}$ | $ z > e^{-\alpha} $ |

Съдържание

- преобразуване на Лаплас
- Z-преобразуване
- Област на сходимост на Z-преобразуванието
- Обратно Z-преобразуване
- Свойства на Z- преобразуването за редици
- Z-предавателна функция на ДЛИВ системи

Z-предавателна функция на ДЛИВ системи

Нека приложим Z-преобразуването към разликовото уравнение за ДЛИВ система с БИХ

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

тогава

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^N a_k y(n-k) \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \cdot z^{-n}$$

при което след използването на свойството линейност

$$Z\left\{\sum a_k x_k(n)\right\} = \sum a_k Z\{x_k(n)\} = \sum a_k X_k(z)$$

Z-предавателна функция на ДЛИВ системи

получаваме

$$\sum_{k=0}^N a_k \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n-k).z^{-n} = \sum_{k=0}^M b_k \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-k).z^{-n}$$

и след това на свойството изместване във времето

$$Z\{x(n-k)\} = X(z) z^{-k}$$

при което след използването на свойството линейност и изместване се получава

$$Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(z) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$

Z-предавателна функция на ДЛИВ системи

z-предавателната функция $H(z)$ на цифрова система се представя като отношение на z -образите на изходния и входния сигнал на системата:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

Важен е фактът, че коефициентите a_k и b_k в израза за z -предавателната функция са идентични с коефициентите на разликовото уравнение, а както бе показано по-рано, те са идентични и с коефициентите на честотната характеристика на системата.

Z-преобразуване за каузална редица



Факторизация на полиномите в числителя и знаменателя (т.е. разлагането им като произведения от прости числа) позволява да запишем $H(z)$ във формата

$$H(z) = K \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_{ok} z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - z_{pk} z^{-1})}$$

където z_{ok} и z_{pk} са съответно M крайни нули и N крайни полюси на съответните полиноми в $H(z)$.

Друго възможно представяне на рационалното z-преобразуване за каузална редица е разлагането до общи множители:

$$H(z) = C + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}}$$

Z-преобразуване за каузална редица



Често z -предавателната функция на системата се представя във вида следващ от разликовото уравнение:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

В зависимост от реда на полиномите в числителя и знаменателя на Z -предавателната функция, $H(z)$, се различават следните видове системи (игнорираме особените точки на числителя и знаменателя):

Z-преобразуване за каузална редица

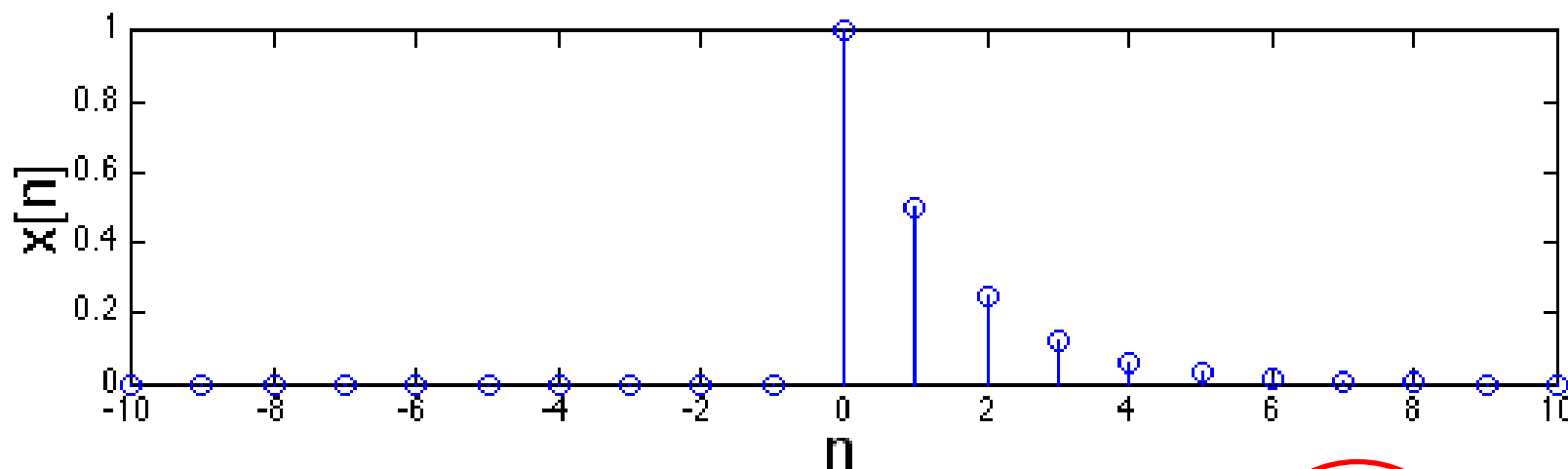


$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

- Числителят е константа ($M = 0$), системата има само полюси. Това е БИХ система и се нарича *(все)полюсна* (all-pole) или още *авторегресивна* (AR).
- Знаменателят е константа ($N = 0$), системата има само нули. Това е КИХ система и се нарича *(все)нулева* или още система с *пълзящо осредняване* (MA).
- Системата има и нули и полюси. Това е БИХ система и се нарича *авторегресивна с пълзящо осредняване* (ARMA).

Пример за изчисляване на Z-преобразуване

Да се изчисли Z-преобразуването за $x(n) = \alpha^n u(n)$

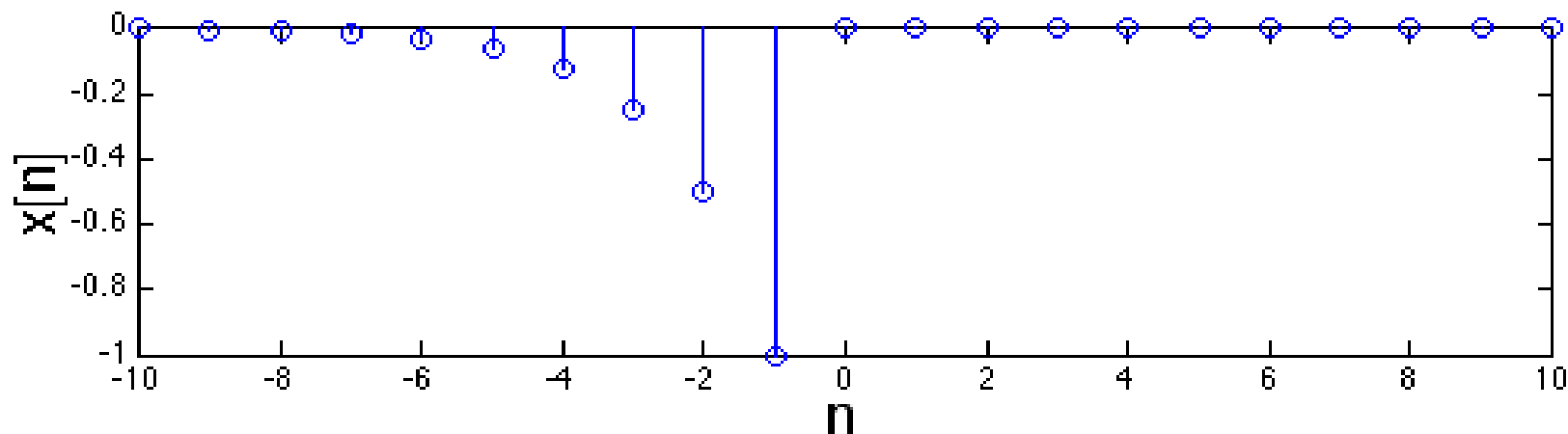


$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z}{z - \alpha}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} \quad \text{сумата е сходяща само при } |z| > |\alpha|$$

Пример за изчисляване на Z-преобразуване

Нека сега да разгледаме друга функция $x(n) = -\alpha^n u(-n-1)$



$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\alpha^n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (\alpha z^{-1})^n = 1 - \frac{1}{1 - z\alpha^{-1}} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

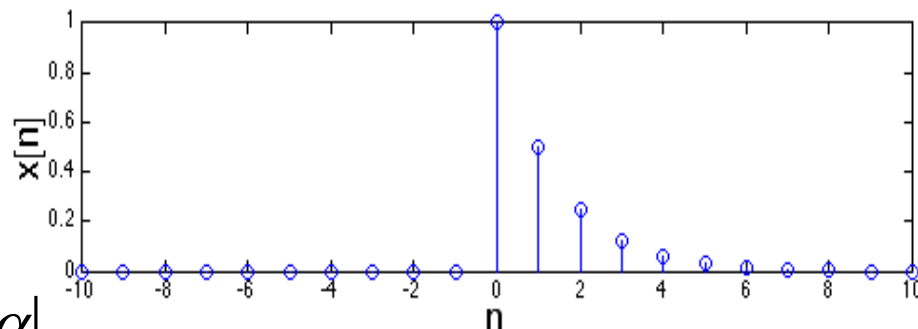
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^n z^{-n} \text{ сумата е сходяща само при } |\alpha| > |z|$$

Пример за изчисляване на Z-преобразуване

Пример 1:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

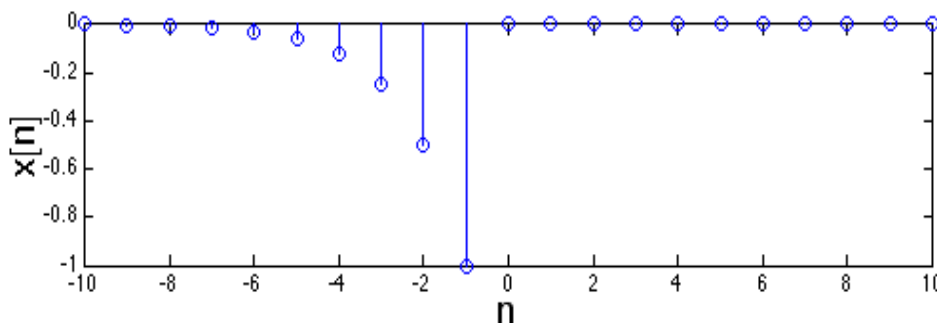
сумата е сходима само при $|z| > |\alpha|$



Пример 2:

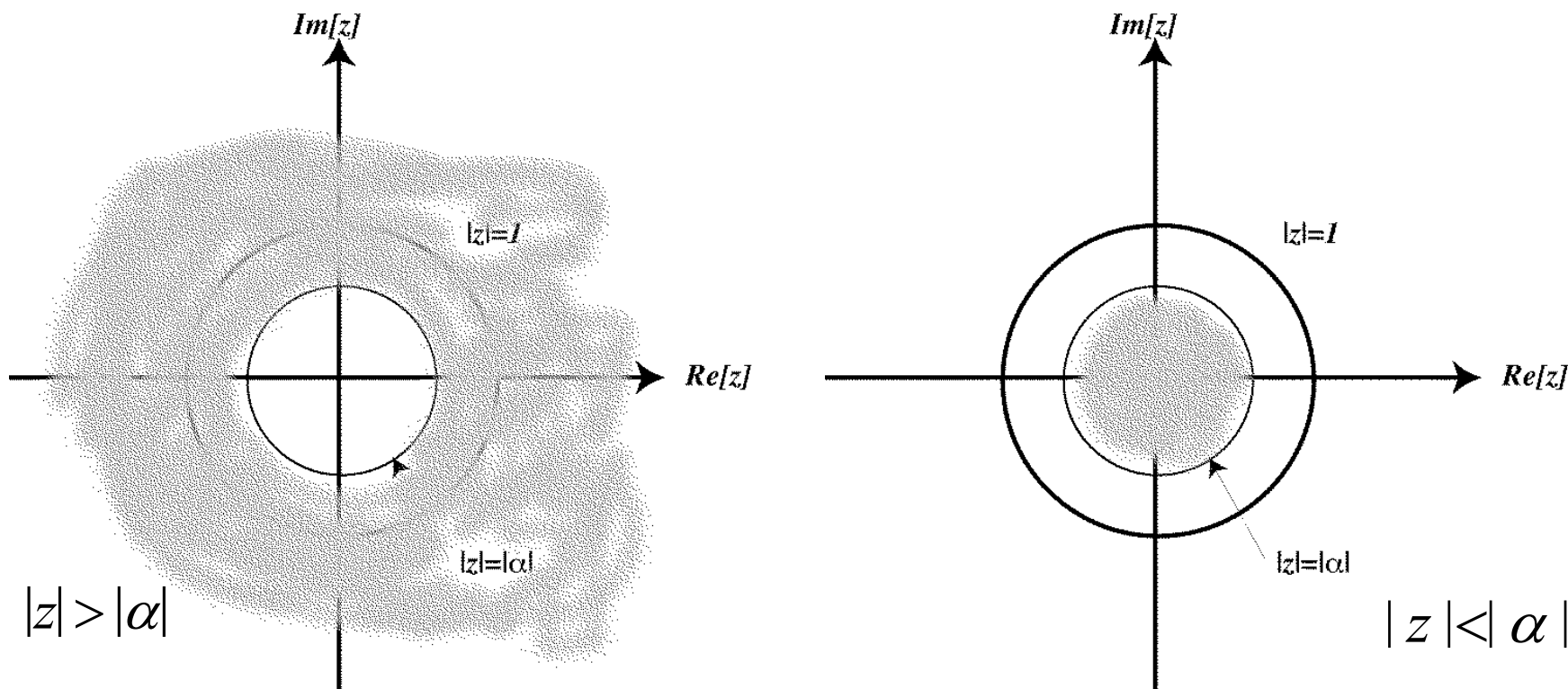
$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

сумата е сходима само при $|\alpha| > |z|$



Пример за изчисляване на Z-преобразуване

Само Z-образът на сигнала не е достатъчен за еднозначното представяне на сигнала в z-областта, така че е необходимо винаги да се уточнява областта на сходимост.



Възможни въпроси за изпита

- Какво е общото в описанието на една цифрова система чрез разликовото уравнение, честотната характеристика и z-предавателната функция?
- Какво представлява авторегресивната система?
- Как се нарича системата, която има само нули?
- Дайте определение за ARMA система?
- Цифрова система се описва от разликово уравнение с коефициенти: $b_0 = 1$, $b_1 = 0,5$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0,5$. Какъв тип система е това?
- Каква е връзката между z-предавателната функция и честотната характеристика на цифрова система.