

Цифрова обработка на сигнали

Тема #8

Спектрален и корелационен анализ



Съдържание

Общи сведения и съотношения



Избор на честотата на дискретизация
и дискретност по честота



Особенности при спектрален анализ
на случайни сигнали



Корелационен анализ на редици



Приложения

Съдържание

- **Общи сведения и съотношения**
- Избор на честотата на дискретизация и дискретност по честота
- Особенности при спектрален анализ на случайни сигнали
- Корелационен анализ на редици
- Приложения

Понятия, терминология

- Понятие за спектрален анализ
От какви (честотни) компоненти е съставен сигнала?
- Понятие за автокорелационен анализ
Има ли изразена периодичност в сигнала?
- Понятие за взаимно-корелационен анализ
Доколко два сигнала си приличат?
- Детерминирани и случайни сигнали
 - реализации, ансамбъл реализации,
 - стационарен, нестационарен, ергодичен процес
- Статистически х-ки на случайни сигнали, оценки
 - математическо очакване, дисперсия,
 - функция на разпределение на вероятността
 - спектрална плътност
- Оценка на случаен процес
 - сходяща, неизместена, ефективност на оценката

Общи сведения и основни съотношения

- Честота на дискретизация f_s
- Разделителна способност по честота $\Delta f = 1/T_o = f_s/N$
- Изборът на T_o зависи от интервала на стационарност
- T_o определя разделителната способност по време, Δt

$$\Delta t \Delta f \simeq 1$$

Денис Габор дефинира горна граница (Gabor limit) за точността на едновременна локализация на сигнал в честотната и във времевата област.

Теорема на Benedicks: Не е възможно едновременно дадена функция и нейното Фурие преобразуване да са ограничени (крайни).

Общи сведения и основни съотношения

- Корелационен анализ

Доколко си приличат два сигнала? (степен на подобие)

- Взаимна корелационна функция

$$r_{f,x} = y(n) = f(n) \oslash x(n) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f^*(l) x(n+l)$$

$$f(n) \oslash x(n) = f^*(-n) * x(n)$$

$$\tau_{delay} = T_s \arg \max_n (f(n) \oslash x(n))$$

Взаимокорелационна функция

- Взаимна корелация на $x(n)$ и $y(n)$ е редицата, $r_{xy}(l)$

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y(n-l) \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-l) y(n) \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

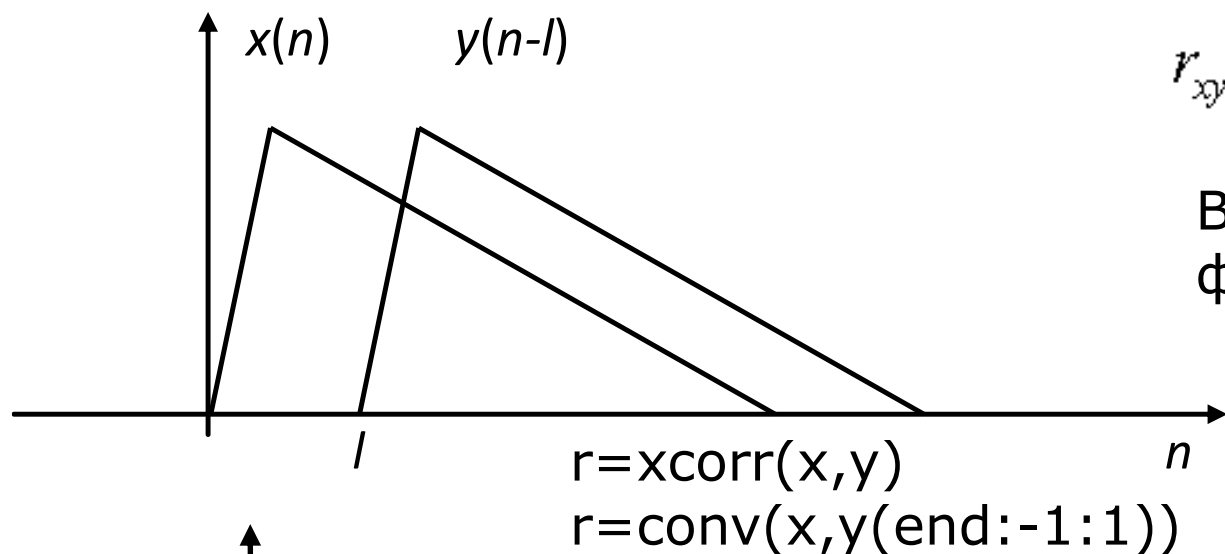
- Разменяме реда на редиците, $r_{yx}(l)$

$$r_{yx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) x(n-l) \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$r_{yx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-l) x(n) \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- $\Rightarrow r_{xy}(l) = r_{yx}(-l)$

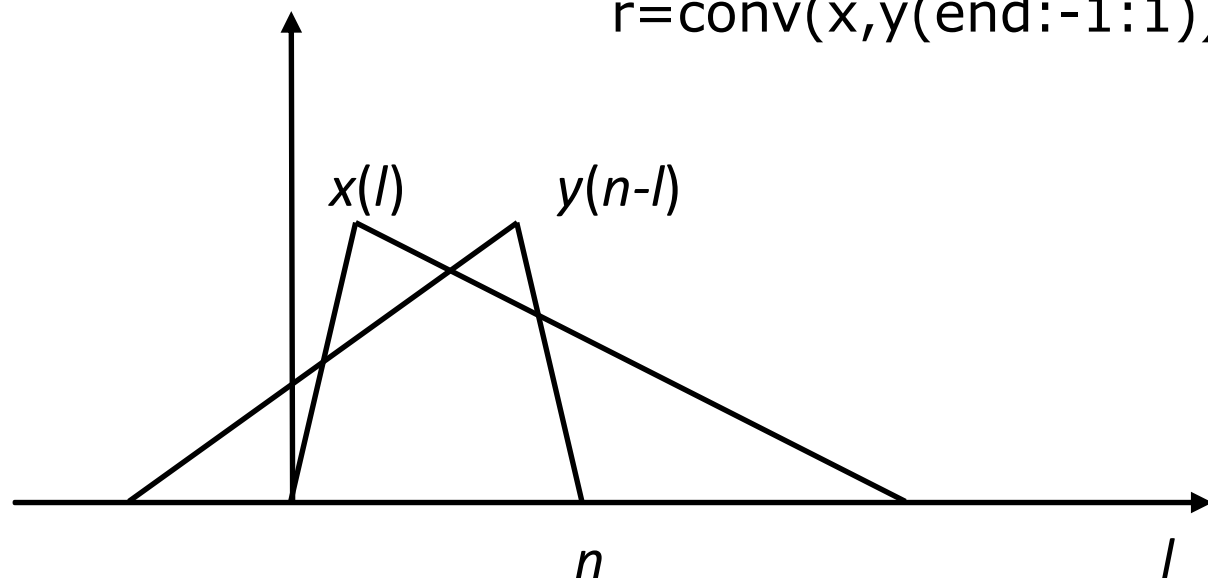
Общи сведения и основни съотношения



$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l)$$

Взаимо-корелационна
функция

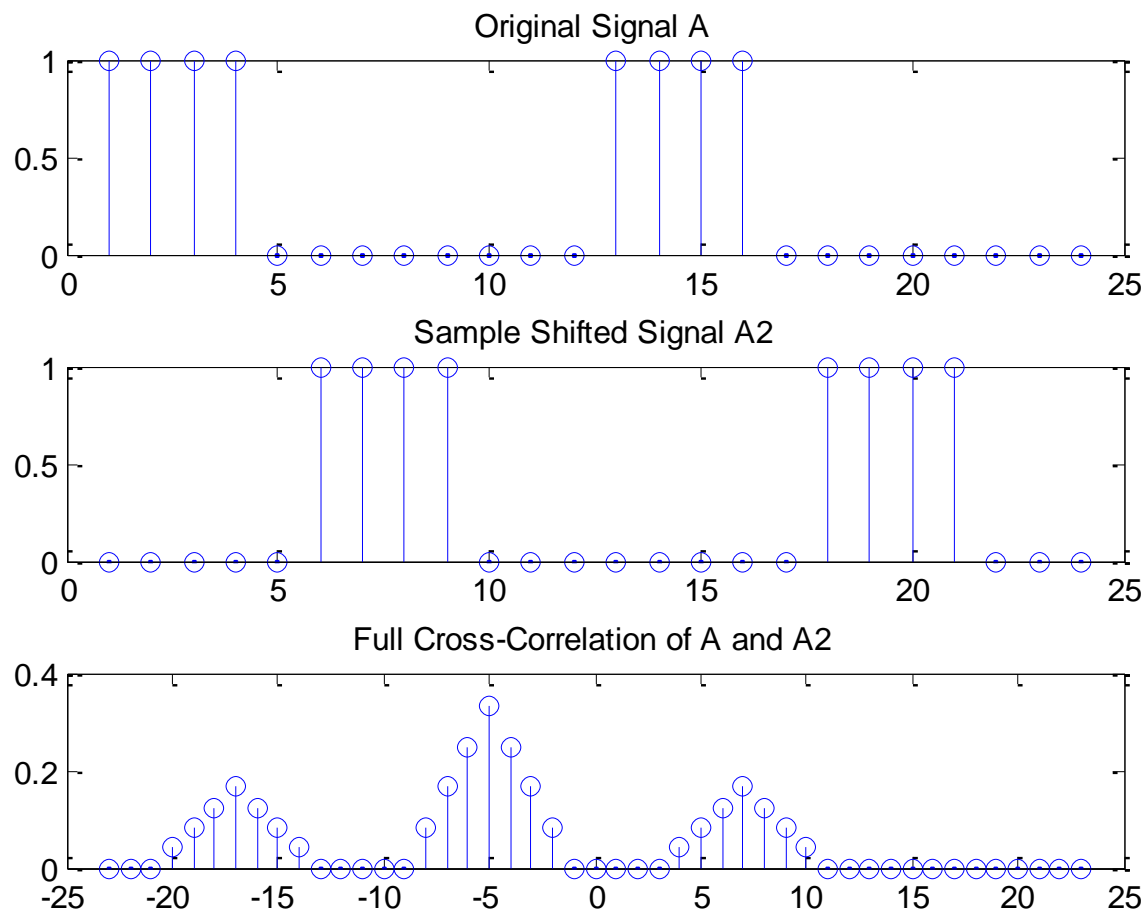
$$r = \text{xcorr}(x, y)$$



$$r(n) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l)y(n-l)$$

Сума на
конволюцията
 $r = \text{conv}(x, y)$

Взаимокорелационна функция



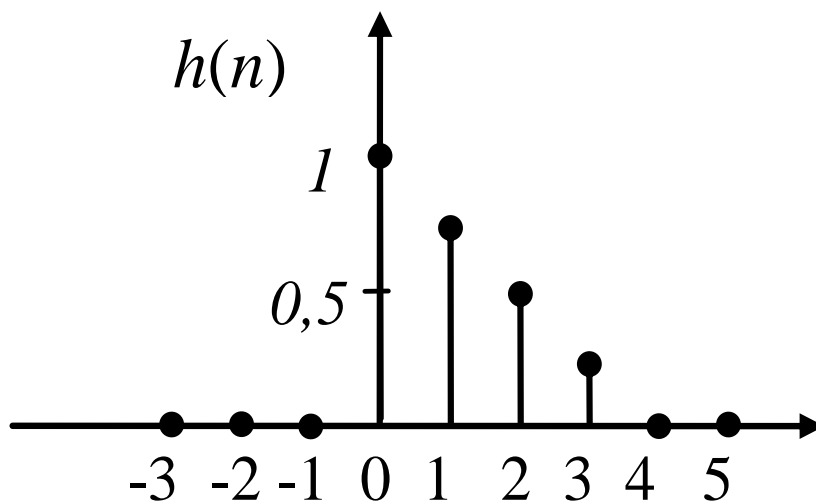
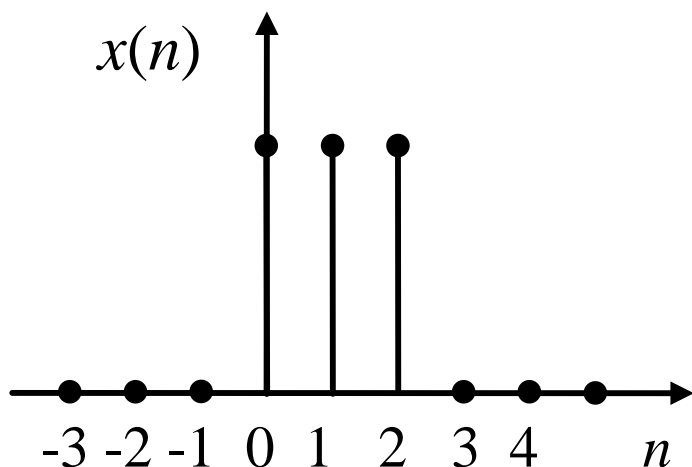
Взаимокорелационна функция



$$r_{xh}(l) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h(n-l) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n+l)h(n), \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$$

$$x(n) = [1.0 \quad 1.0 \quad 1.0]$$

$$h(n) = [1.0 \quad 0.75 \quad 0.5 \quad 0.25]$$



Взаимокорелационна функция



$$l = 0, \quad r_{xh}(0) = x(0)h(0) + x(1)h(1) + x(2)h(2) + x(3)h(3) = \\ = 1.1,0 + 1.0,75 + 1.0,5 + 0.0,25 = 2,25$$

$$r_{xh}(0) = 2,25$$

$$l = -1, \quad r_{xh}(-1) = x(0)h(1) + x(1)h(2) + x(2)h(3) + x(3)h(4) = \\ = 1.0,75 + 1.0,5 + 1.0,25 + 0.0 = 1,5$$

$$r_{xh}(-1) = 1,5$$

$$l = 1, \quad r_{xh}(1) = x(0)h(-1) + x(1)h(0) + x(2)h(1) + x(3)h(2) = \\ = 1.0 + 1.1 + 1.0,75 + 0.0,5 = 1,75$$

$$r_{xh}(1) = 1,75$$

Взаимокорелационна функция



$$l = -2, \quad r_{xh}(-2) = x(0)h(2) + x(1)h(3) + x(2)h(4) + x(3)h(5) =$$
$$= 1.0,5 + 1.0,25 + 1.0 + 0.0 = 0,75$$

$$r_{xh}(-2) = 0,75$$

$$l = 2, \quad r_{xh}(2) = x(0)h(-2) + x(1)h(-1) + x(2)h(0) + x(3)h(1) =$$
$$= 1.0 + 1.0 + 1.1,0 + 0.0,75 = 1,0$$

$$r_{xh}(2) = 1,0$$

Взаимокорелационна функция



$$l = -3, \quad r_{xh}(-3) = x(0)h(3) + x(1)h(4) + x(2)h(5) + x(3)h(6) = \\ = 1.0,25 + 1.0 + 1.0 + 0.0 = 0,25$$

$$r_{xh}(-3) = 0,25$$

$$l = 3, \quad r_{xh}(3) = x(0)h(-3) + x(1)h(-2) + x(2)h(-1) + x(3)h(0) = \\ = 1.0 + 1.0 + 1.0 + 0.1,0 = 0$$

$$r_{xh}(3) = 0$$

Взаимокорелационна функция



$$l = -4, \quad r_{xh}(-4) = x(0)h(4) + x(1)h(5) + x(2)h(6) + x(3)h(7) = \\ = 1.0 + 1.0 + 1.0 + 0.0 = 0$$

$$r_{xh}(-4) = 0$$

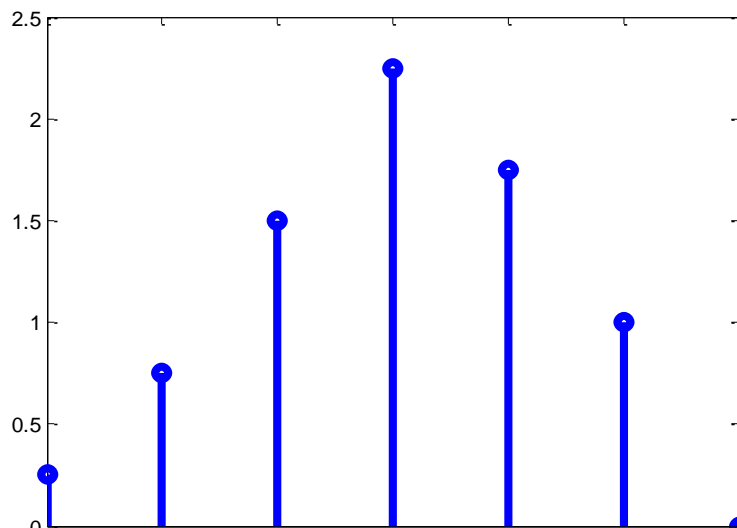
$$l = 4, \quad r_{xh}(4) = x(0)h(-4) + x(1)h(-3) + x(2)h(-2) + x(3)h(-1) = \\ = 1.0 + 1.0 + 1.0 + 0.0 = 0$$

$$r_{xh}(4) = 0$$



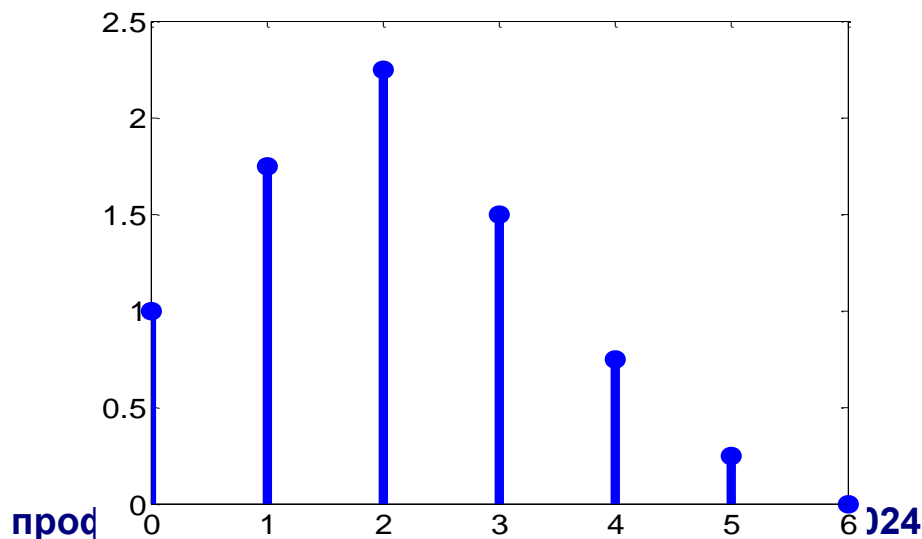
Взаимокореляционная функция

Взаимокореляционная
функция



$$\begin{aligned}r(-3) &= 0.25 \\r(-2) &= 0.75 \\r(-1) &= 1.50 \\r(0) &= 2.25 \\r(1) &= 1.75 \\r(2) &= 1.00 \\r(3) &= 0\end{aligned}$$

(Линейная)
конволюция



$$\begin{aligned}y(0) &= 1.00 \\y(1) &= 1.75 \\y(2) &= 2.25 \\y(3) &= 1.50 \\y(4) &= 0.75 \\y(5) &= 0.25 \\y(6) &= 0\end{aligned}$$

Общи сведения и основни съотношения



■ Автокорелационна функция

Има ли скрита периодичност в сигнала?

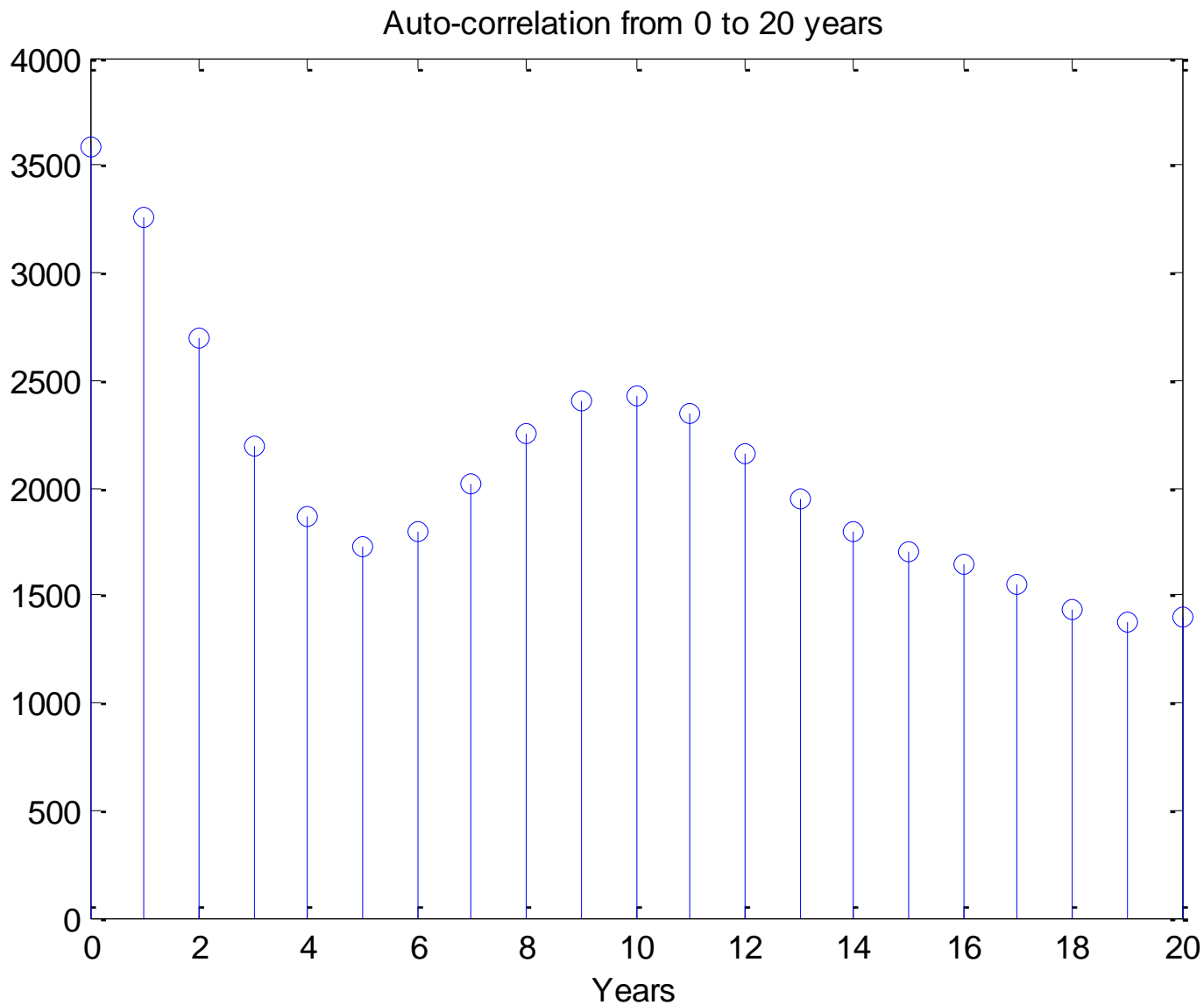
$$r_{x,x}(l) = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x^*(n) x(n+l) = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x(l) x(n-l)$$

$$r_{x,x}(l) = r_{x,x}(-l)$$

$$r_{x,x}(l) \leq r_{x,x}(0)$$

$$O(L^2)$$

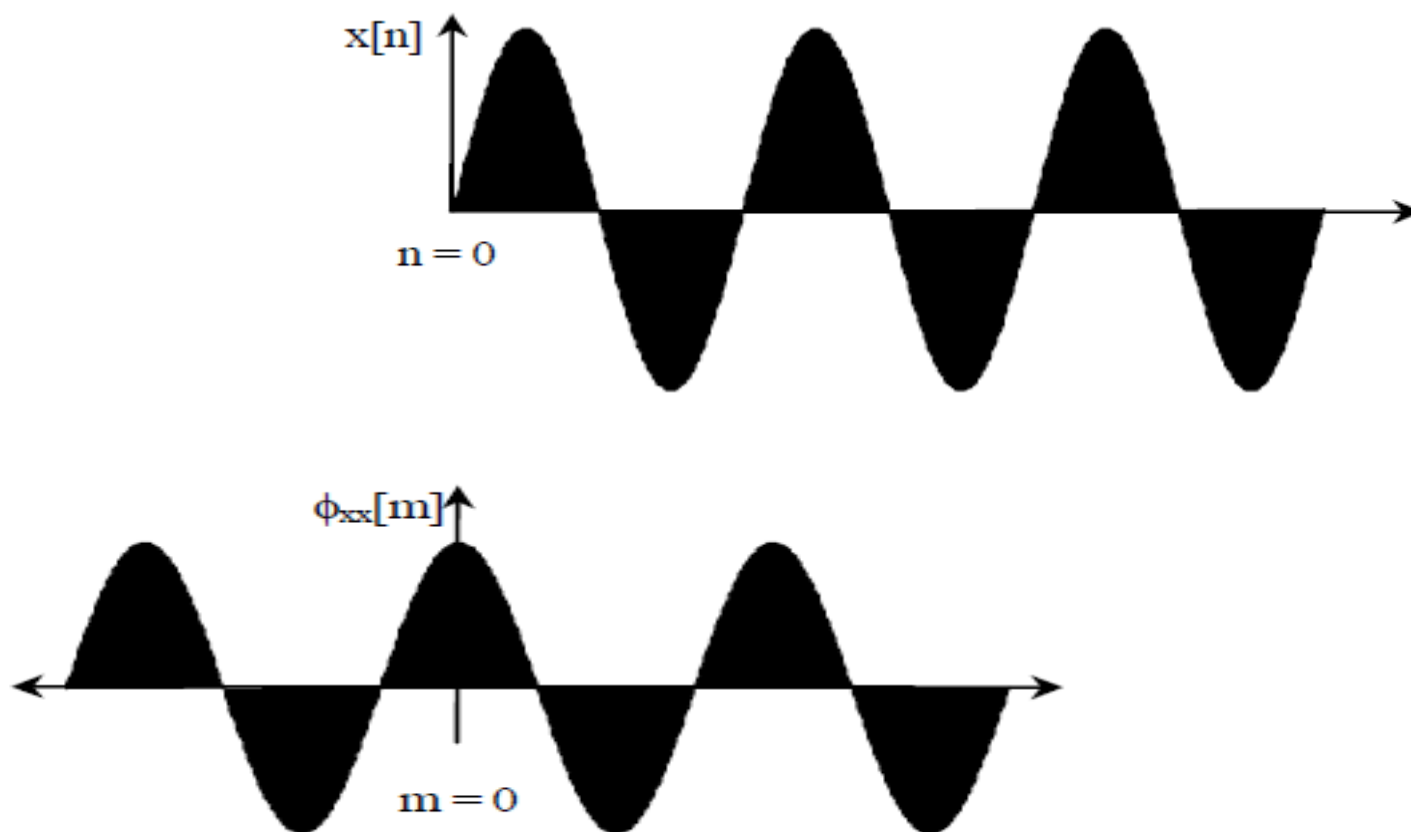
Автокорреляционная функция



Общи сведения и основни съотношения



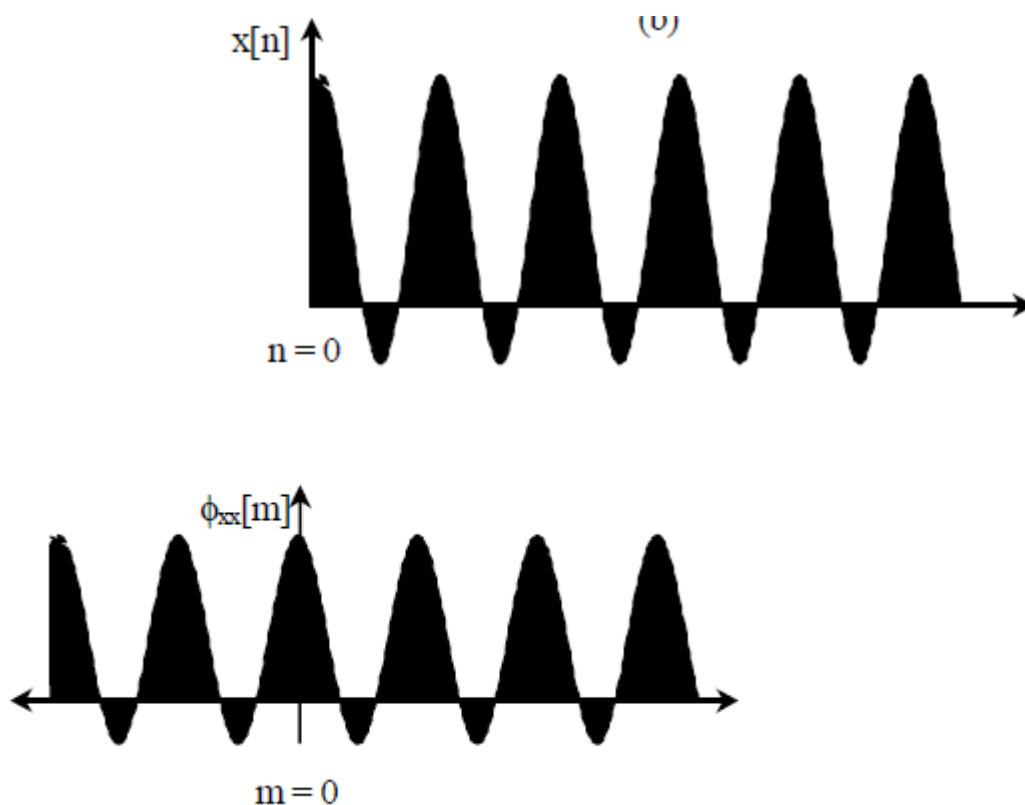
Автокорелационна функция: Пример 1



Общи сведения и основни съотношения

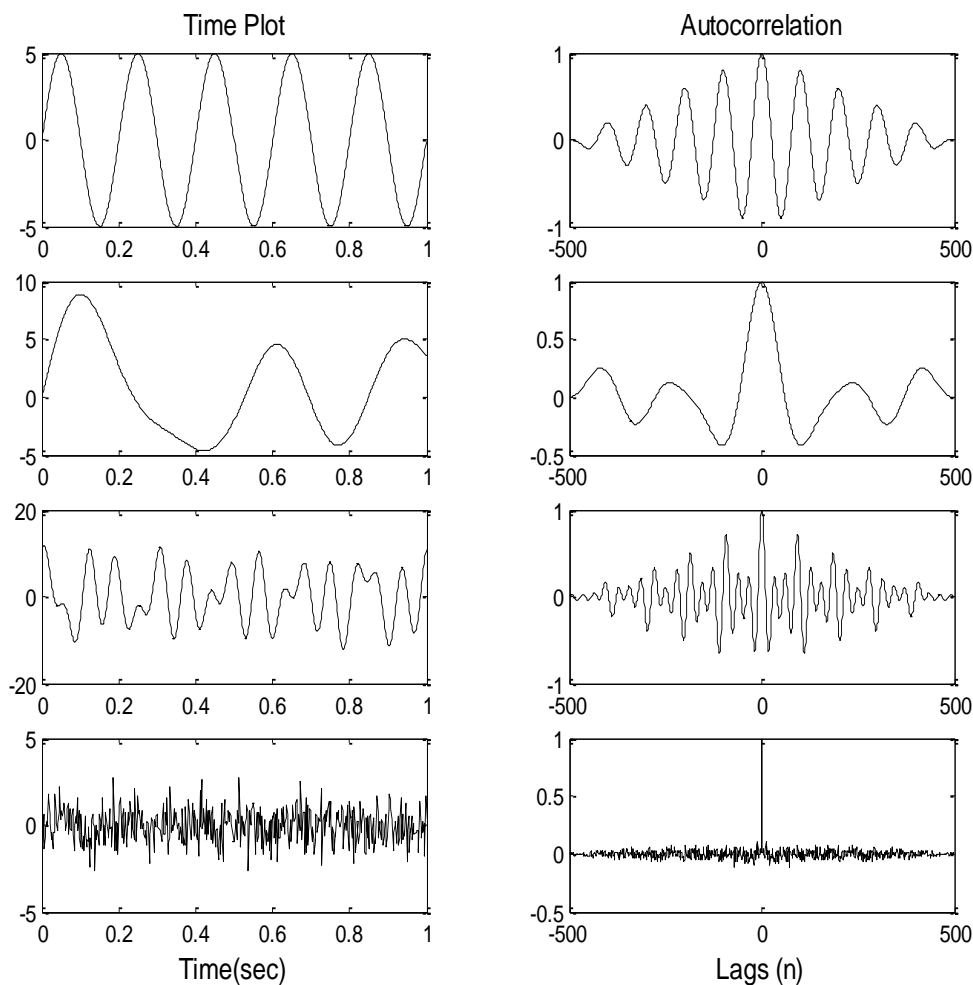


Автокорелационна функция: Пример 2



Общи сведения и основни съотношения

Автокорелационна функция: Пример 3



Теорема на Wiener-Khintchine

Спектралната плътност = DFT от автокорелационната функция

$$P_{xx}(\Omega) = |X(\Omega)|^2 = X(\Omega) \cdot X^*(\Omega) = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \right\} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j\Omega n} \right\}$$

$$P_{xx}(\Omega) = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \right\} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j\Omega n} \right\} = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \right\} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] e^{-j\Omega n} \right\}$$

Теорема на Wiener-Khintchine

Спектралната плътност = DFT от автокорелационната функция

$$P_{xx}(\Omega) = X(\Omega) \cdot X^*(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{x[n] * x[-n]\} \cdot e^{-j\Omega n}$$

$$P_{xx}(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{xx}[m] \cdot e^{-j\Omega m}$$

$$\phi_{xx}[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\Omega) \cdot e^{j\Omega m} d\Omega = \int_{-0.5}^{0.5} P_{xx}(F) \cdot e^{j2\pi Fm} dF$$

Общи сведения и основни съотношения



Ускорено изчисляване на автокорелационната функция

$$X(k) = \text{FFT}[x(n)]$$

$$S(k) = X(k) X^*(k)$$

$$r_{x,x}(l) = \text{IFFT}[S(k)]$$

$$O(L \log_2(L))$$

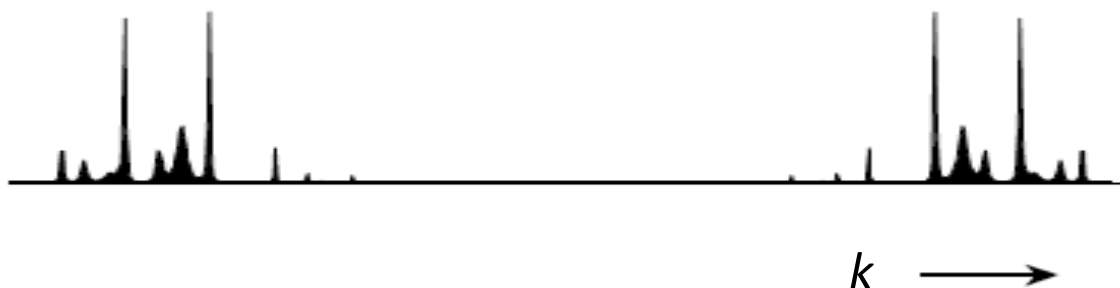
Общи сведения и основни съотношения



$$r_{x,x}(l) = \text{IFFT}[S(k)]$$



$$S(k) = X(k) X^*(k)$$

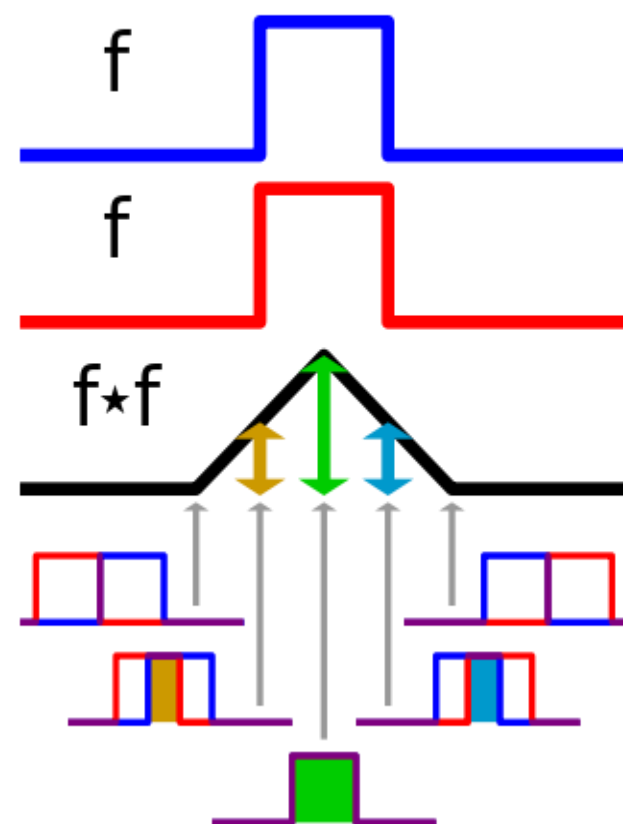
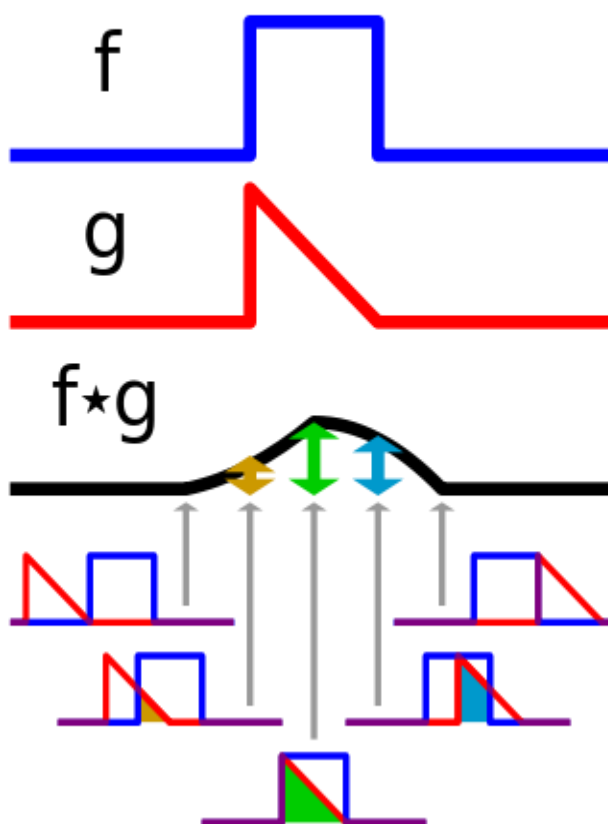
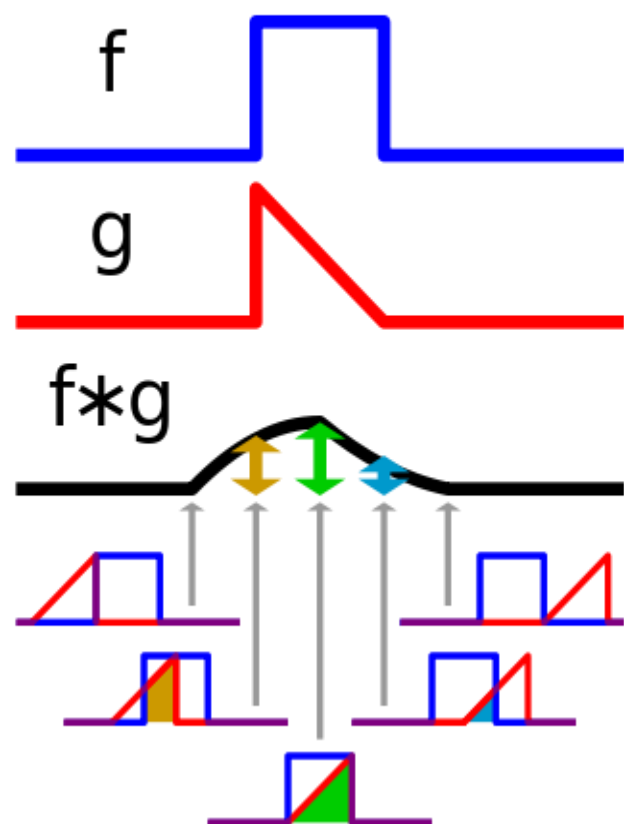


Общи сведения и основни съотношения

Конволюция

Взаимо
Корелационна
ф-я

Авто-
корелационна
ф-я



Съдържание

- Общи сведения и съотношения
- Избор на честотата на дискретизация и дискретност по честота
- Особенности при спектрален анализ на случайни сигнали
- Корелационен анализ на редици
- Приложения

Избор на честотата на дискретизация и дискретност по честота

Теоремата за дискретизация, $f_s \geq 2f_h$, е приложима само при сигнали с ограничен спектър, т.е. сигнали, за които спектърът е равен на нула за честоти по-високи от $f_h < \infty$.

В много практически приложения честотата f_h се избира от условието спектралните съставляващи с честоти до f_h да съдържат значима част от мощността на сигнала, например 95% или 98%.

За правилен избор на f_s е необходимо да имаме предварителна информация за източника на сигнала.

Избор на честотата на дискретизация и дискретност по честота

$$\Delta f = f_1 = f_s / N = 1 / T_s N = 1 / T_o$$

Как да се подбере за Δf , за да се получи коректно представяне на непрекъснатия спектър $X(f)$ на редицата $x(n)$ чрез дискретен спектър $X(f_k)$ с краен брой отчети?

Ако се интересуваме дали изследваният сигнал съдържа добре изразена периодична съставляваща с честота f_x , удачно е Δf да се определи при спазване на условието:

$$\Delta f = f_x / A, \quad \text{където } A \text{ е цяло число.}$$

Това гарантира изчисляване на отчет за честота съвпадаща с f_x , при което съответния пик в спектъра няма да се размие.

Съдържание

- Общи сведения и съотношения
- Избор на честотата на дискретизация и дискретност по честота
- Особенности при спектрален анализ на случайни сигнали
- Корелационен анализ на редици
- Приложения

Особенности при спектрален анализ на случайни сигнали



При спектралния анализ на случайни процеси се използват два подхода – параметричен и непараметричен.

- Параметричните методи използват представянето на сигнала чрез апроксимиращи аналитични модели, от чийто параметри (коефициенти) се определят спектралните характеристики на сигнала.
- Непараметричните методи се базират на преобразуването на Фурие на сигнала.

Възможни въпроси за изпита

- Пояснете смисъла на принципа на неопределеност приложено към спектралния анализ на нестационарни случайни сигнали.
- По какво се отличават комплексния спектър на сигнала от спектъра на мощността.
- В какво се състои разликата между операциите конволюция и взаимна корелация на редици.
- Каква е автокорелционната редица на редицата „бял шум“?