

Цифрова обработка на сигнали

Тема #4

***Ред и преобразуване на Фурие за
дискретни във времето сигнали***



Кратки исторически сведения



Jean Baptiste Joseph Fourier
1768 – 1830

Съдържание

- Ред на Фурие за дискретни във времето периодични сигнали
- Свойства на реда на Фурие за дискретни периодични сигнали
- Представяне на апериодични дискретни сигнали в честотната област, преобразуване на Фурие за дискретни сигнали (DTFT)
- Свойства на DTFT
- Дискретно преобразуване на Фурие (DFT) за дискретни сигнали
- Методи за изчисляване на ДПФ. Алгоритми за бързо преобразуване на Фурие (FFT).

Ред на Фурие за дискретни във времето периодични сигнали

Разглеждаме дискретни редици, $x(n)$, но формулировките и изводите направени тук са в сила и за дискретни във времето сигнали $x(nT_s)$.

Както беше показано по-рано, съществуват само N на брой хармонично свързани дискретни комплексни експоненциални редици с честота на първия хармоник

$\Omega_1 = 2\pi/N$ и период N :

$$E_k(n) = e^{jk(2\pi/N)n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Ред на Фурие за дискретни във времето периодични сигнали

Причина за това е свойството периодичност на дискретната комплексна експонента

$$E_{k+N}(n) = e^{j(k+N)(2\pi/N)n} = e^{j2\pi n} e^{jk(2\pi/N)n} = E_k(n)$$

На това основание можем да разгледаме реда на дискретната комплексна експонента като дефиниран за всеки N последователни цели числа

$$E_k(n) = e^{jk(2\pi/N)n} \quad k = \langle N \rangle$$

където всички хармонични съставляващи, определени от k , са периодични с период N .

Ред на Фурие за дискретни във времето периодични сигнали

Тогава линейната комбинация на елементите на реда $E_k(n)$ също ще бъде дискретна периодична редица, $x(n)$, с период N :

$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}, \quad n \in \pm\infty$$

Това се нарича ред на Фурие за периодична редица $x(n)$, или още дискретен във времето ред на Фурие.

Тъй като сумата е дефинирана за N последователни ст-ти, при крайни (по амплитуда) стойности на a_k този ред винаги е сходящ.

Как да изчислим стойностите на коефициентите a_k ?

Ред на Фурие за дискретни във времето периодични сигнали

Един начин да се определят a_k е чрез решаване на система от N линейни уравнения с N неизвестни a_k , $k = 0, 1, \dots, N-1$. Тези N уравнения се съставят чрез заместване на $n = 0, 1, \dots, N-1$ в реда на Фурие, при което се получава:

$$x(0) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k$$

$$x(1) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \cdot e^{jk(2\pi/N)}$$

$$x(2) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \cdot e^{jk(2\pi/N)2}$$

...

$$x(N-1) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \cdot e^{jk(2\pi/N).(N-1)}$$

Доказано е, че системата у-я е линейно независима и следователно има еднозначно решение за N последователни отчета на редицата $x(n)$.

Ред на Фурие за дискретни във времето периодични сигнали

Системата уравнения се решава посредством следните стъпки:

$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}, \quad n \in \pm\infty \quad | \cdot e^{-jr(2\pi/N)n}$$

$$x(n)e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j(k-r).(2\pi/N)n}$$

Сумираме лявата и дясна страна за N последователни стойности на n :

$$\sum_{n=\langle N \rangle} x(n)e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{n=\langle N \rangle} \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j(k-r).(2\pi/N)n}.$$

$$\sum_{n=\langle N \rangle} x(n)e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(k-r).(2\pi/N)n}$$

Ред на Фурие за дискретни във времето периодични сигнали

Може да се провери за различни стойности на k и r че

$$\sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(k-r)(2\pi/N)n} = \begin{cases} N & \text{for } (k-r) = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0 & \text{for all other cases.} \end{cases}$$

защото

$$E_{k+N}(n) = e^{j(k+N)(2\pi/N)n} = e^{j2\pi n} e^{jk(2\pi/N)n} = E_k(n)$$

Наистина, за $(k-r) = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$ Всеки член под сумата е равен на 1, така че общата сума е равна на N .

За всяка друга стойност на $(k-r)$, изрази сумата на N последователни отчета а принадлежащи на един период на хармониците на комплексните експоненти с честоти $(k-r)2\pi/N$ е нула.

Ред на Фурие за дискретни във времето периодични сигнали

След полагането $r=k$ в

$$\sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(k-r).(2\pi/N)n}$$

и отчитането на резултата за

$$\sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(k-r)(2\pi/N)n}$$

получаваме:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-jk(2\pi/N)n}$$

Ред на Фурие за дискретни във времето периодични сигнали

Така получаваме двойката уравнения които представя време-
честотното преобразуване на периодични редици, наречено
Ред на Фурие за дискретни във времето периодични сигнали

$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}, \quad n \in \pm\infty$$

Формула за синтез

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-jk(2\pi/N)n}$$

Формула за анализ

Ред на Фурие за дискретни във времето периодични сигнали

За опростяване на тези означения можем да заменим израза за дискретната комплексна експонента с означението за фазовия вектор W_N

$$e^{-j(2\pi / N)} = W_N$$

и тогава Редът на Фурие за дискретни във времето периодични сигнали се записва като

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) W_N^{nk}$$

$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k W_N^{-nk}$$

Коефициентите a_k в редът на Фурие се наричат *спектрални коефициенти*, или *спектър* на периодичната редица $x(n)$.

Ред на Фурие за дискретни във времето периодични сигнали

Обикновено спектърът на периодична редица се означава с

$X_p(k)$, където $X_p(k) = a_k$ или $X_p(k) = a_k N$. По такъв начин двойката формули за редът на Фурие може да се запише:

$$\begin{aligned} X_p(k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) W_N^{nk} & \text{или} & & X_p(k) &= \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) W_N^{nk} \\ x(n) &= \sum_{k=\langle N \rangle} X_p(k) W_N^{-nk} & & & x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} X_p(k) W_N^{-nk} \end{aligned}$$

Спектърът $X_p(k)$ е функция на дискретната нормализирана честота Ω_k . Честотите на хармониците са $\Omega_k = k(2\pi/N)$, $k=0,1,2,\dots,N-1$, където $2\pi/N = \Omega_1$ е честотата на първата или основна хармонична съставляща.

Ред на Фурие за дискретни във времето периодични сигнали

За удобство на означенията се въвеждат операторите за право F_p и обратно преобразуване F_p^{-1} , тогава двойката уравнения за реда на Фурие се записва като:

$$X_p(k) = F_p \{x(n)\}$$

$$x(n) = F_p^{-1} \{X_p(k)\}$$

Тема #4

- Ред на Фурие за дискретни във времето периодични сигнали
- Свойства на реда на Фурие за дискретни периодични сигнали
- Представяне на апериодични дискретни сигнали в честотната област, преобразуване на Фурие за дискретни сигнали (DTFT)
- Свойства на DTFT
- Дискретно преобразуване на Фурие (DFT) за дискретни сигнали
- Методи за изчисляване на ДПФ. Алгоритми за бързо преобразуване на Фурие (FFT).

Свойства на реда на Фурие за дискретни периодични сигнали

■ Линеиност

$$F_p\{\sum b_i x_i(n)\} = \sum b_i F_p\{x_i(n)\} = \sum b_i X_{pi}(k)$$

където всички редици $x_i(n)$ са периодични с период N .

■ Симетрия

За реална периодичната редица $x(n)$, редът на Фурие е периодичен, т.е. спектърът на редицата е симетричен:

$$X_p(-k) = X_p^*(k)$$

където $X_p^*(k)$ е комплексно спрегната стойност за $X_p(k)$

Свойства на реда на Фурие за дискретни периодични сигнали

Оттук следва че амплитудния спектър за реална периодична редица е четно симетричен:

$$\left| X_p(-k) \right| = \left| X_p(k) \right|$$

докато фазовия спектър е с нечетна симетрия:

$$\arg[X_p(-k)] = - \arg[X_p(k)].$$

Свойства на реда на Фурие за дискретни периодични сигнали

■ Краен брой коефициенти

Редът на Фурие за периодична редица $x(n)$ с период N има N спектрални коефициента, т.е., спектъра се състои от N хармонично свързани комплексни експоненти

$$E_{k+N}(n) = e^{j(k+N)(2\pi/N)n} = e^{j2\pi n} e^{jk(2\pi/N)n} = E_k(n)$$

■ Периодичност

Спектърът на периодична редица е периодичен с период N :

$$X_p(k) = X_p(k+N).$$

Тук спектърът, $X_p(k)$, е представен като функция на поредния номер k на хармоничната в реда на Фурие. Съответната нормализирана кръгова честота Ω_k е:

$$\Omega_k = k\Omega_1 = k(2\pi/N).$$

Свойства на реда на Фурие за дискретни периодични сигнали

Периода на спектъра $X_p(\Omega_k)$ измерен в радиани е:

$$N \Omega_1 = N(2\pi/N) = 2\pi.$$

Тези съотношения могат да се обобщят за дискретния сигнал $x(nTs)$ представяйки неговия спектър като функция на честотата на колебание f измерена в Hz.

Периодът на дискретния сигнал $x(nTs)$ е NTs , и съответно честотата f_1 на първата му хармонична се определя като реципрочна величина на нейния период във времевата област:

$$f_1 = 1/(NTs) = f_s/N$$

Откъдето за периода на спектъра съдържащ N хармонични съставлящи можем да запишем:

$$Nf_1 = N/(NTs) = 1/Ts = f_s$$



Свойства на реда на Фурие за дискретни периодични сигнали

Съществува взаимно съответствие между качествата *дискретност* и *периодичност* във времевата и честотната области, а именно **ако сигналът е дискретен във времевата област, то неговия спектър е периодичен и ако сигналът е периодичен във времето то неговия спектър е дискретен.**

Периодичността с период N в едната област води до дискретност с разрешаваща способност $1/N$ в другата област и обратно.

Свойства на реда на Фурие за дискретни периодични сигнали

Например, за ред на Фурие на дискретния периодичен сигнал $x(nT_s)$ с период $T=NT_s$ --> периодичност във времевата област с период NT_s съответства на дискретност на спектъра $X_p(f)$ с разрешаваща способност:

$$\Delta f = f_1 = 1/(NT_s) = f_s / N$$

От друга страна, дискретността T_s на сигнала във времевата област $x(nT_s)$ се проявява като периодичност на спектъра в честотната област, и спектъра $X_p(f)$ е периодичен с период:

$$f_s = 1/T_s.$$

Свойства на реда на Фурие за дискретни периодични сигнали

Времева област

Честотна област

Непрекъснат (аналогов) сигнал

Непериодичен спектър

Непериодичен сигнал

Непрекъснат спектър

Дискретен сигнал (ред)

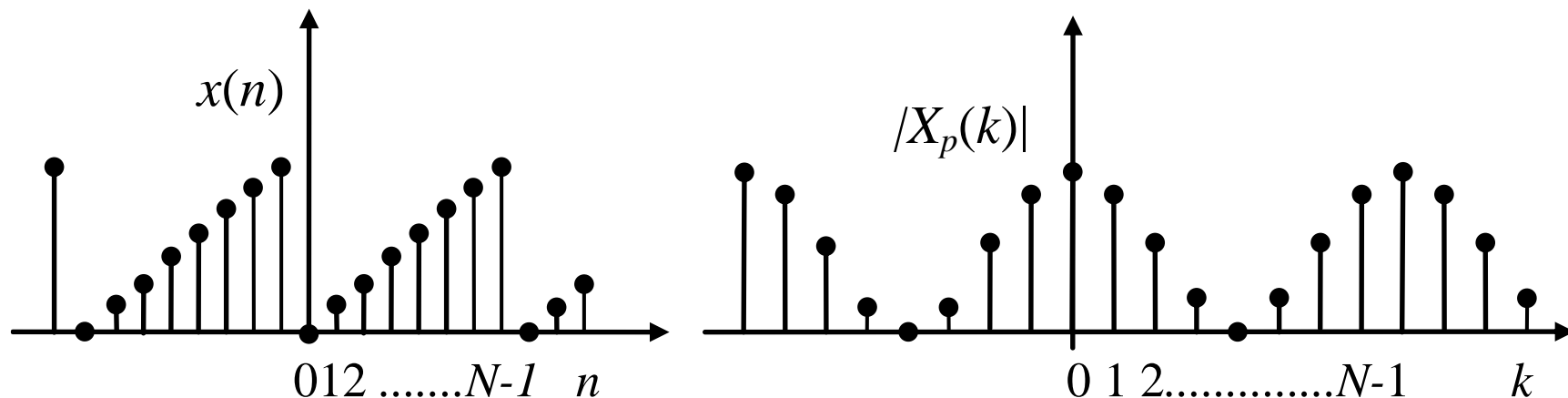
Периодичен спектър

Периодичен сигнал

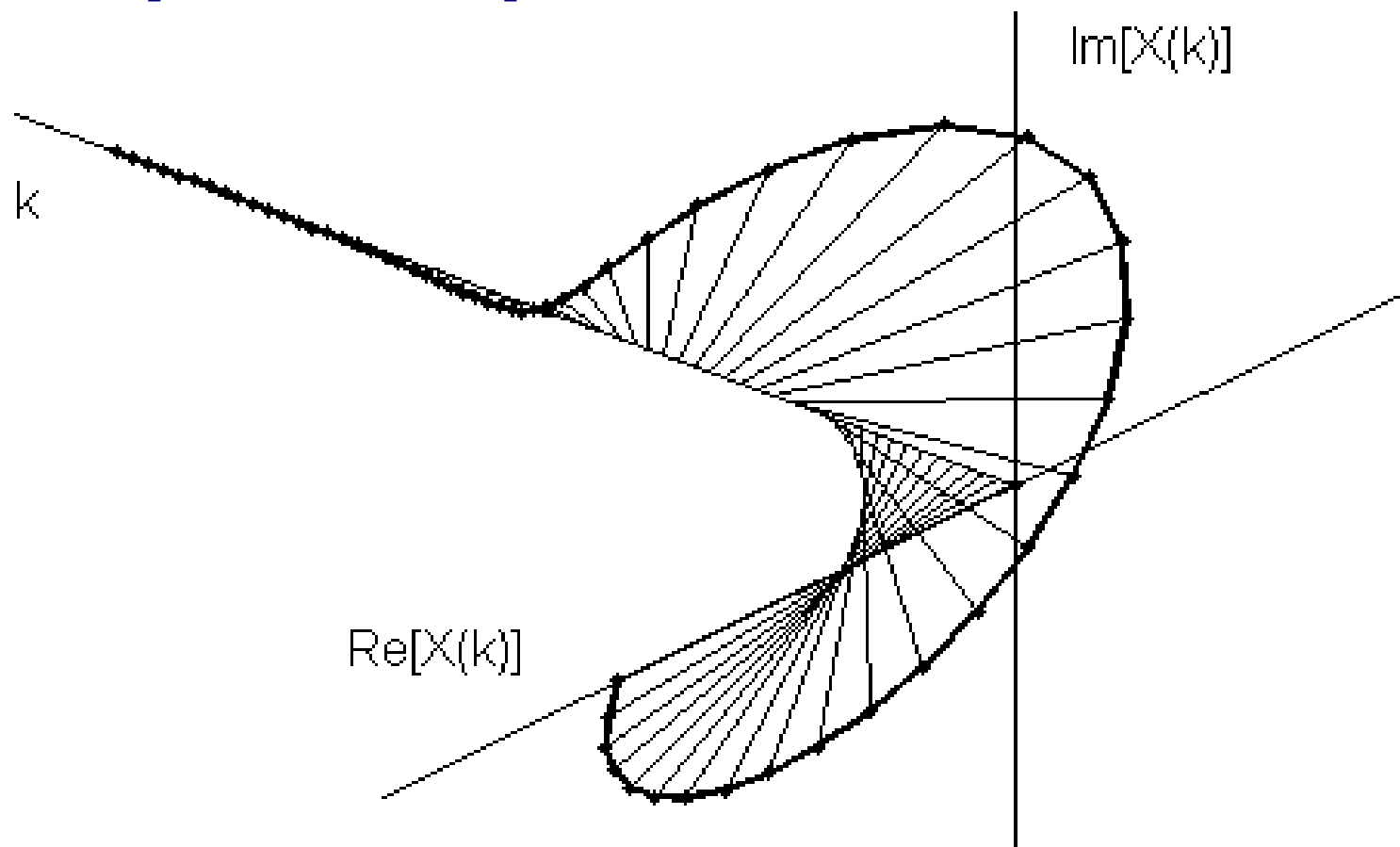
Дискретен спектър

Свойства на реда на Фурие за дискретни периодични сигнали

Пример



Свойства на реда на Фурие за дискретни периодични сигнали



Илюстрация на комплексен спектър в тримерна Декартова координатна система.

Свойства на реда на Фурие за дискретни периодични сигнали

■ Изместване във времето

Ако

$$F_p\{x(n)\} = X_p(k)$$

то изместване на редицата във времевата област води до:

$$F_p\{x(n-m)\} = X_p(k)W_N^{mk} = X_p(k)e^{-j(2\pi/N)mk}$$

Изместването във времето не променя амплитудния спектър, но променя фазовия спектър.

Свойства на реда на Фурие за дискретни периодични сигнали

■ Изместване в честотната област

Тъй като спектърът $X_p(k)$ е периодична редица в честотната област то обратното Фурие преобразуване на измествения спектър (в честотната област) води до умножение с комплексна експоненциална функция на реда във времевата област:

$$F_p^{-1}\{X_p(k-l)\} = x(n)W_N^{-nl} = x(n)e^{j(2\pi/N)nl}$$

което може да се запише още във формата

$$F_p\{x(n)W_N^{-nl}\} = X_p(k-l)$$

Умножение на редицата $x(n)$ с комплексна експонента във времевата област се нарича *амплитудна модулация*.

Свойства на реда на Фурие за дискретни периодични сигнали

- **Равенство на Парсевал** за периодични сигнали изразява запазването на мощността на сигнала при представянето му във времевата и честотната области.

$$\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x(n)|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |X_p(k)|^2$$

Внимание: Периодичните сигнали имат неограничена енергия, но мощността на периодичен сигнал е крайна при ограничени стойности на амплитудата на сигнала.

Мощността на периодичен сигнал представен във времевата област е равна на енергията за един период. Поради периодичността на спектъра, мощността във честотната област се дефинира за един период, т.е за N отчета, или за N хармонични, разположени в интервала 2π .

Свойства на реда на Фурие за дискретни периодични сигнали

Равенството на Парсевал за енергията се записва само за един период N на времевия сигнал:

$$\sum_{n=\langle N \rangle} |x(n)|^2 = N \sum_{k=\langle N \rangle} |X_p(k)|^2$$

Редицата $|X_p(k)|^2$ за $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ в дясната страна на равенството представлява разпределение на мощността на сигнала в честотната област (разпределението по хармоници) и се нарича *спектрална плътност на мощността* или само *спектрална плътност*.

Спектърът $X_p(k)$ е комплексен, а спектралната плътност $|X_p(k)|^2$ е реална и не съдържа информация за фазата на хармониците. **Защо?**

Свойства на реда на Фурие за дискретни периодични сигнали

■ Периодична конволюция

За две периодични редици с общ период N се дефинира операцията *периодична конволюция*:

$$y(n) = x_1(n) \otimes x_2(n) = \sum_{m=\langle N \rangle} x_1(m) x_2(n - m)$$

Може да се докаже че резултата, $y(n)$, от периодичната конволюция на две редици с период N е периодична редица със същият период N .

Непериодичната (линейна) конволюция не е директно приложима към периодични редици, тъй като те са с безкрайна дължина и следователно сумата на конволюцията няма да достигне сходимост.

Свойства на реда на Фурие за дискретни периодични сигнали

Обърнете внимание че се използват различни символи за означаване на операциите кръгова конволюция \otimes и непериодична конволюция $*$.

$$y(n) = x_1(n) \otimes x_2(n) = \sum_{m=\langle N \rangle} x_1(m) x_2(n - m)$$

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n)$$

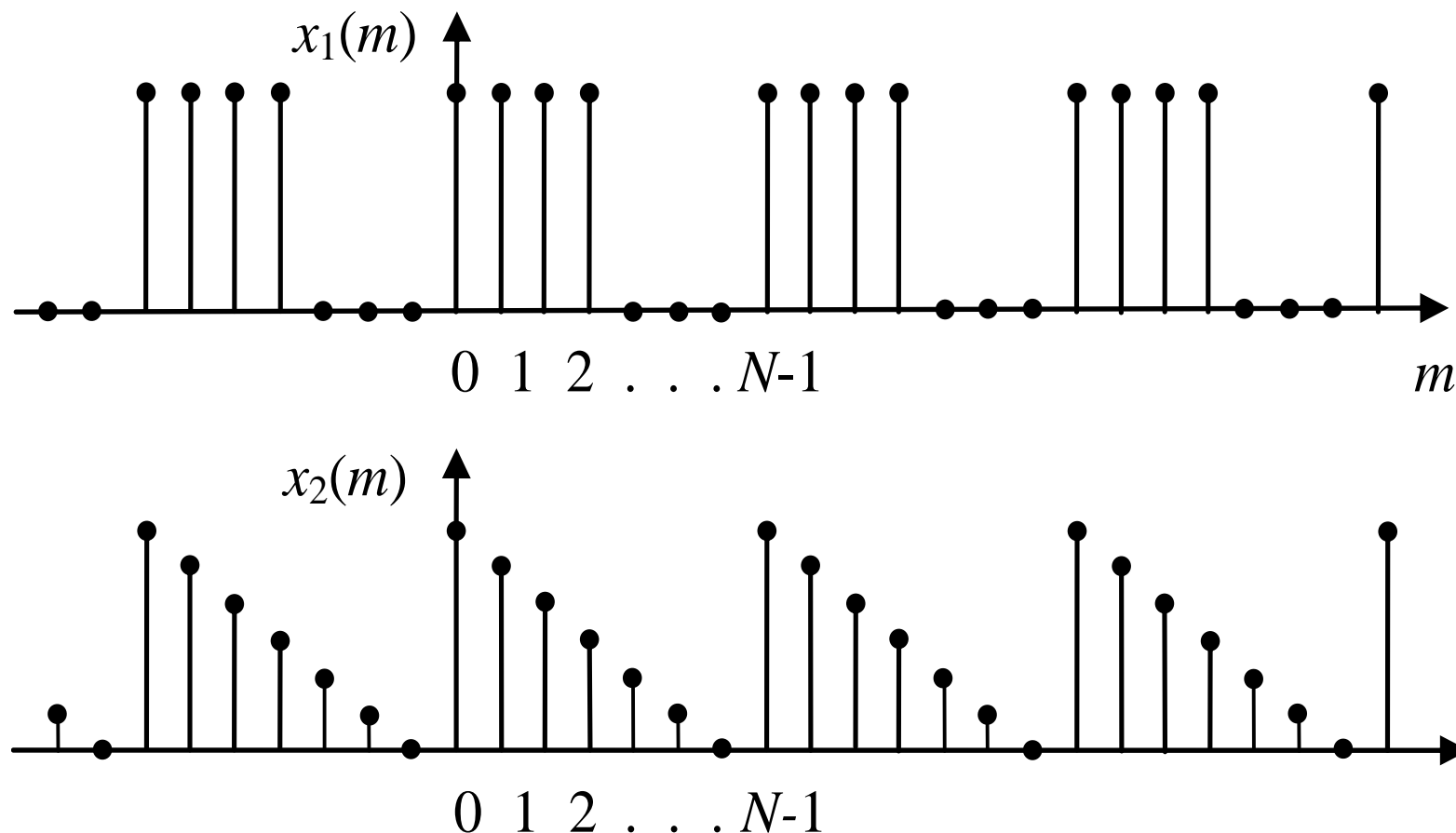
Линейната (непериодична) конволюция се използва за изчисляване на изходния сигнал в ДЛИВ системи.

Периодичната конволюция не е приложима за тази цел понеже импулсната характеристика на устойчива ДЛИВ система е винаги непериодична редица. (Защо?)

В същото време периодичната конволюция е важен инструмент и се използва за бързо изчисляване на операцията непериодична (линейна) конволюция.

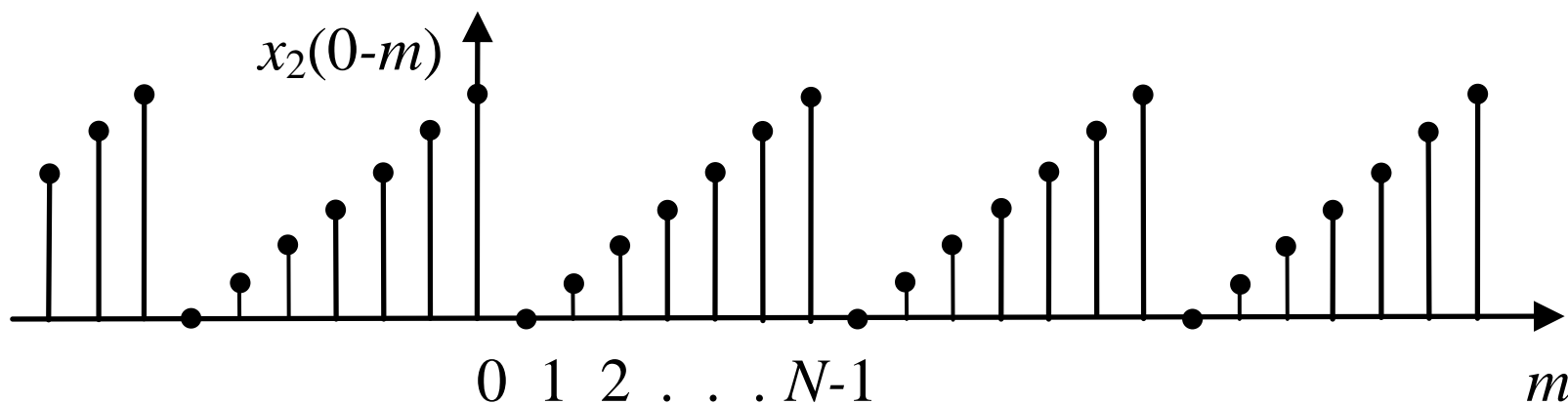
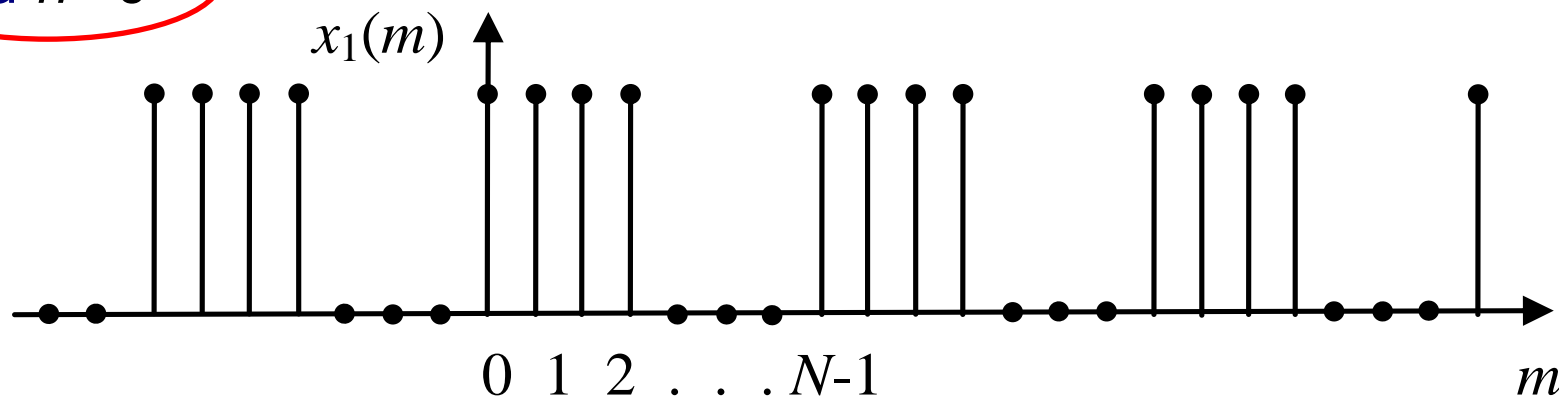
Свойства на реда на Фурие за дискретни периодични сигнали

Пример: Изчисляване на операцията периодична конволюция



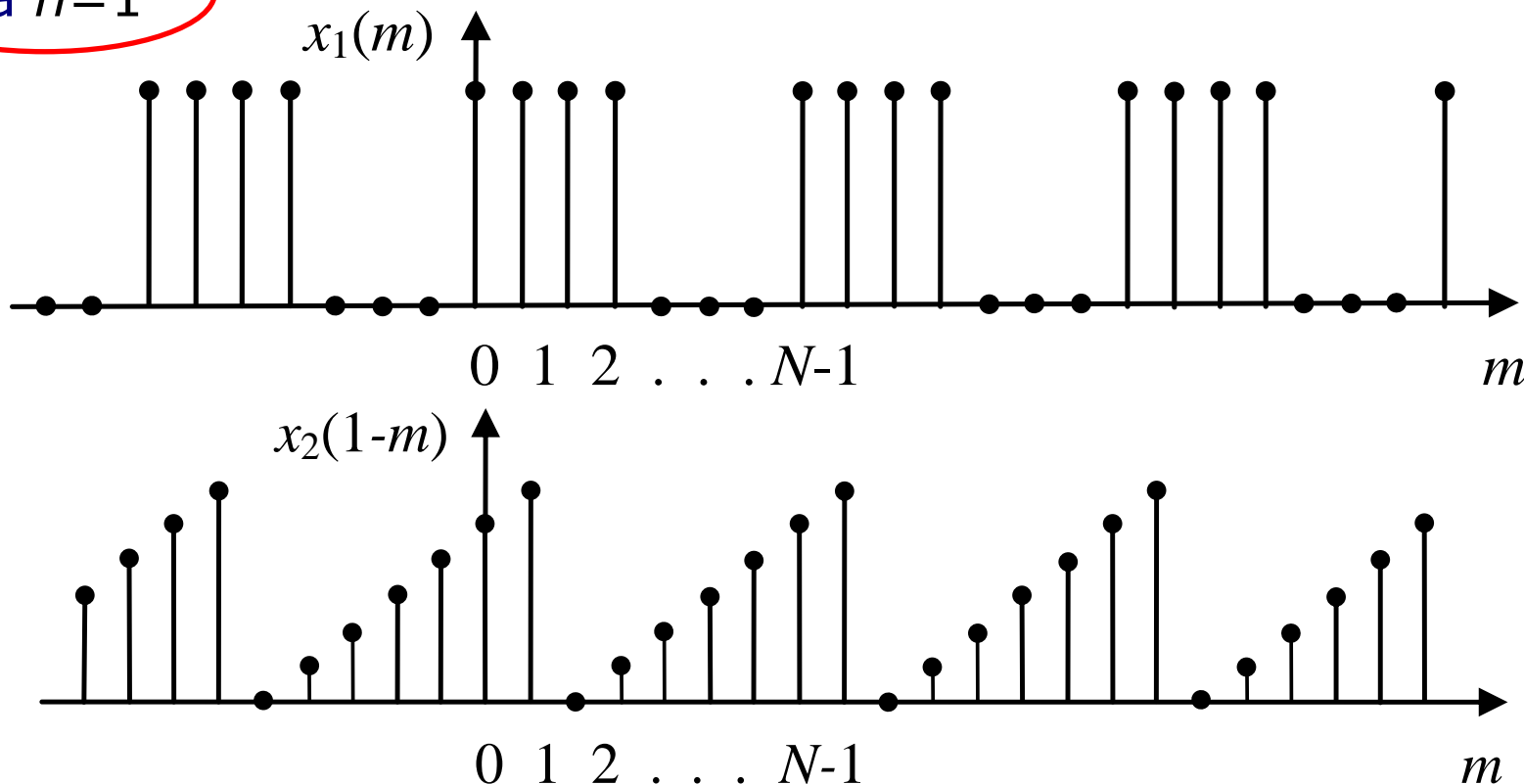
Свойства на реда на Фурие за дискретни периодични сигнали

За $n=0$



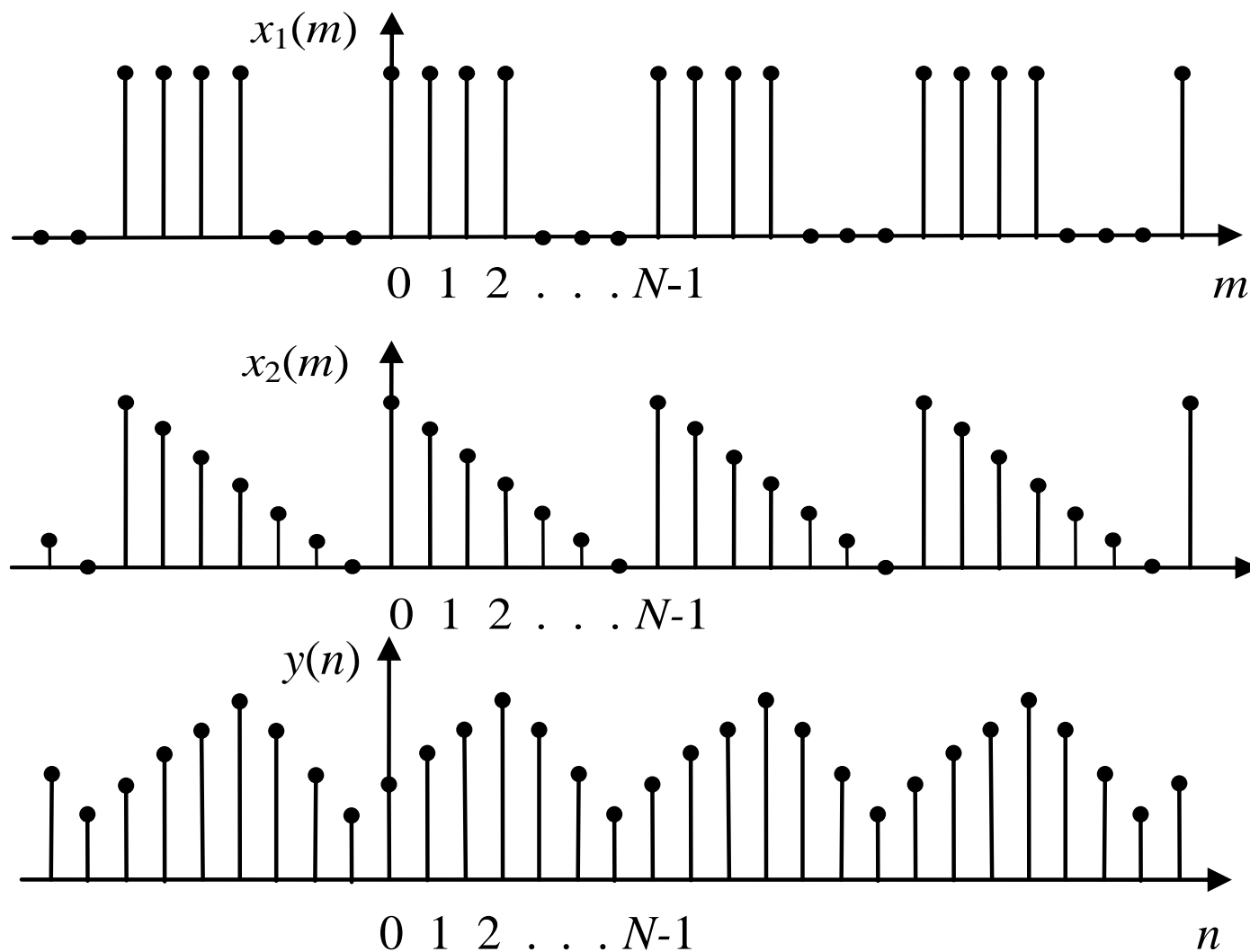
Свойства на реда на Фурие за дискретни периодични сигнали

За $n=1$



по-същият начин се изчисляват стойностите на изхода за моментите от дискретното време n , чак до $n=N-1$.

Свойства на реда на Фурие за дискретни периодични сигнали



Свойства на реда на Фурие за дискретни периодични сигнали

Може да бъде доказано че ако

$$y(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$$

където $Y_p(k)$, $X_{p1}(k)$, $X_{p2}(k)$ са редовете на Фурие за периодичните редици $y(n)$, $x_1(n)$, $x_2(n)$, е в сила равенството

$$Y_p(k) = N X_{p1}(k) X_{p2}(k)$$

Тема #4

- Ред на Фурие за дискретни във времето периодични сигнали
- Свойства на реда на Фурие за дискретни периодични сигнали
- Представяне на **непериодични** дискретни сигнали в честотната област, преобразуване на Фурие за дискретни сигнали (DTFT)
- Свойства на DTFT
- Дискретно преобразуване на Фурие (DFT) за дискретни сигнали
- Методи за изчисляване на ДПФ. Алгоритми за бързо преобразуване на Фурие (FFT).



Представяне на непериодични дискретни сигнали в честотната област, преобразуване на Фурие за дискретни сигнали (DTFT)

- периодичните сигнали се дефинират в безкраен интервал на независимата променлива, n , и те представляват идеализирани модели на реалните сигнали.
- всички сигнали в природата са крайни тъй като те съществуват или могат да бъдат наблюдавани само за краен интервал от време.
- извън интервала на наблюдение не може да се знае със сигурност поведението на сигнала. По тази причина всички реални сигнали се считат непериодични.

Как тогава да се извърши Фурие анализ?



Представяне на непериодични дискретни сигнали в честотната област, преобразуване на Фурие за дискретни сигнали (DTFT)

Времева област

Непрекъснат (аналогов) сигнал

Непериодичен сигнал

Дискретен сигнал (ред)

Периодичен сигнал

Честотна област

Непериодичен спектър

Непрекъснат спектър

Периодичен спектър

Дискретен спектър



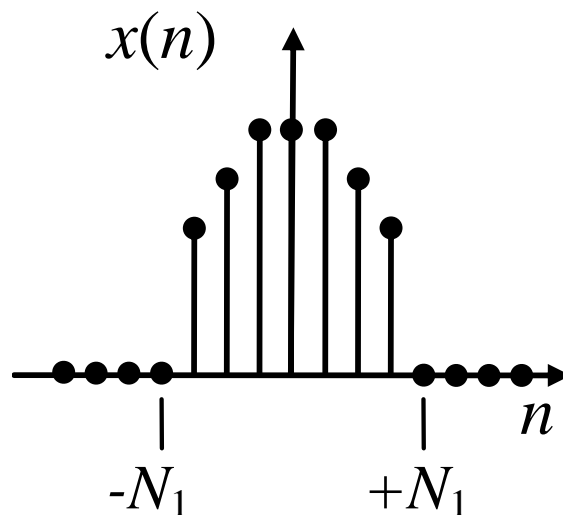
Представяне на непериодични дискретни сигнали в честотната област, преобразуване на Фурие за дискретни сигнали (DTFT)

Разглеждаме последователност от стъпки чрез която ще получим преобразуване на Фурие, което позволява непериодична редица да бъде представена в честотната област посредством периодичен непрекъснат спектър.

Следвайки класическият подход за периодично продължение на непериодична редица, ще въведем преобразуването на Фурие за непериодична редица, което се нарича *дискретно във времето преобразуване на Фурие (Discrete in Time Fourier Transform, DTFT)*.

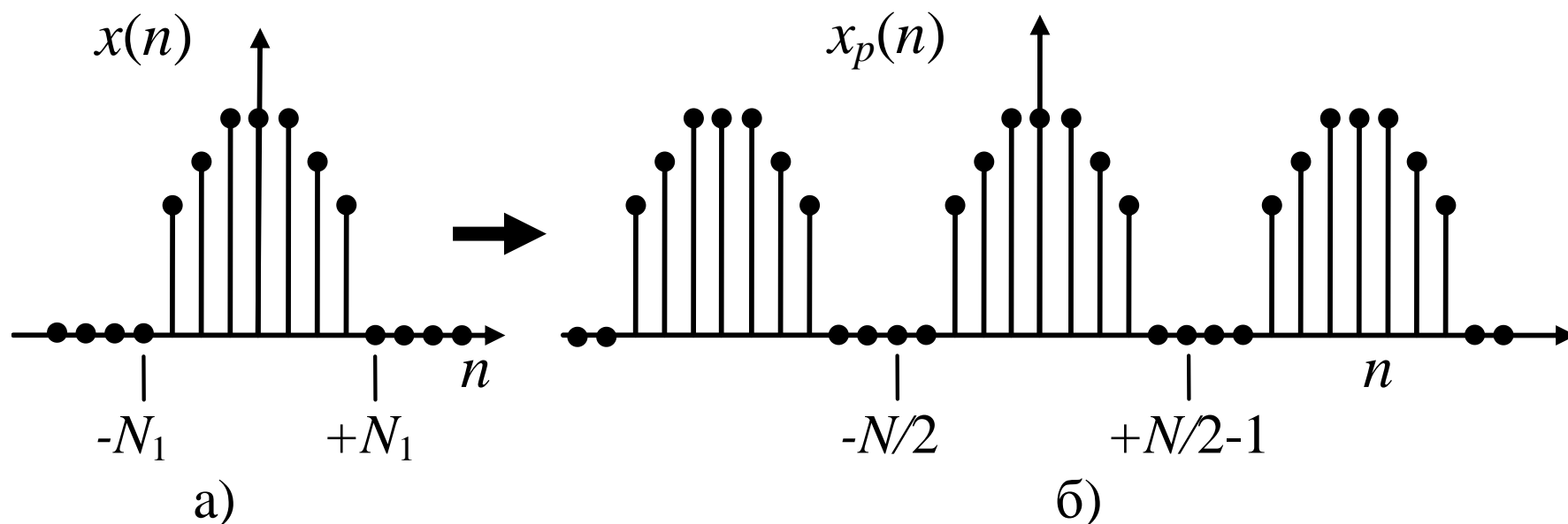
Представяне на непериодични дискретни сигнали в честотната област, преобразуване на Фурие за дискретни сигнали (DTFT)

Нека да разгледаме редицата $x(n)$, определена в крайния интервал $n = \pm N_1$.



За да определим спектъра на такъв сигнал първо построяваме периодична редица, $x_p(n)$, чрез периодично повторение на $x(n)$ с период, $N > 2N_1 + 1$.

Представяне на непериодични дискретни сигнали в честотната област, преобразуване на Фурие за дискретни сигнали (DTFT)



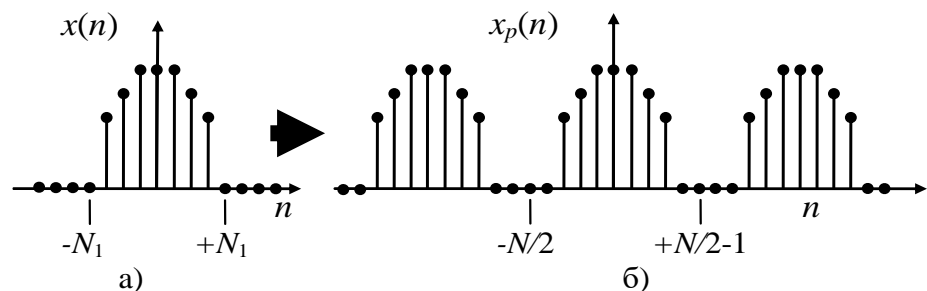
$$N > 2N_1 + 1$$

Представяне на непериодични дискретни сигнали в честотната област, преобразуване на Фурие за дискретни сигнали (DTFT)

Доколкото тази нова редица $x_p(n)$ е периодична, можем да използваме двойката формули за реда на Фурие за дискретни периодични редици

$$X_p(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x_p(n) e^{-jk(2\pi/N)n}$$

$$x_p(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} X_p(k) e^{jk(2\pi/N)n}$$



Вземайки под внимание че $x_p(n)$ и $x(n)$ съвпадат в интервала $n = [-N/2, +N/2-1]$ (предполагаме четна стойност за N), и че изборът на N последователни отчета за сумиране е произволен, можем да запишем горните уравнения в следния вид:



Представяне на непериодични дискретни сигнали в честотната област, преобразуване на Фурие за дискретни сигнали (DTFT)

$$X_p(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{+N/2-1} x(n) e^{-jk(2\pi/N)n} \quad \text{за } k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} X_p(k) e^{jk(2\pi/N)n} \quad \text{за } n = [-N/2, +N/2 - 1].$$

Умножаваме числителя и знаменателя в двете уравнения с 2π и извършваме следните полагания:

$$\Omega_1 = \Delta\Omega = 2\pi/N,$$

$$\Omega_k = k \Delta\Omega = k (2\pi/N),$$

$$X(\Omega_k) = N X_p(k).$$



Представяне на непериодични дискретни сигнали в честотната област, преобразуване на Фурие за дискретни сигнали (DTFT)

В резултат на което получаваме:

$$X(\Omega_k) = \sum_{n=-N/2}^{+N/2-1} x(n) e^{-j\Omega_k n} \quad \text{за } k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(\Omega_k) e^{j\Omega_k n} \Delta\Omega \quad \text{за } n = [-N/2, +N/2 - 1]$$

Когато $N \rightarrow \infty$, дискретната честота Ω_k се превръща в непрекъснатата честота Ω , т.е. $\Omega_k \rightarrow \Omega$ и $\Delta\Omega \rightarrow d\Omega$.

Представяне на непериодични дискретни сигнали в честотната област, преобразуване на Фурие за дискретни сигнали (DTFT)

При този преход, сумата

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(\Omega_k) e^{j\Omega_k n} \Delta\Omega$$

се превръща в интеграл, чиито интервал на интегриране е произволна лента с ширина 2π . Така получаваме двойката у-я

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$



Представяне на непериодични дискретни сигнали в честотната област, преобразуване на Фурие за дискретни сигнали (DTFT)

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$
$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

Тази двойка представлява правото и обратно преобразуване на Фурие за непериодични редици, което се нарича дискретно във времето преобразуване на Фурие (*Discrete-in-Time Fourier Transform, DTFT*).

Посредством операторите за право, F , и обратно, F^{-1} , преобразуване можем да запишем двойката уравнения като

$$X(\Omega) = F\{x(n)\},$$

$$X(n) = F^{-1}\{X(\Omega)\}.$$

Представяне на непериодични дискретни сигнали в честотната област, преобразуване на Фурие за дискретни сигнали (DTFT)

Доколкото DTFT бе въведено за редици с крайна дължина, сходимостта на сумата

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

не е проблем и спектъра $X(\Omega)$ винаги може да бъде изчислен.

Преобразуването на Фурие може да се приложи и за безкрайни редици ако те отговарят на условията за абсолютна сумируемост:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| < \infty \quad \text{или имат крайна енергия} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 < \infty$$

Всъщност тези условия се удовлетворяват от широк клас редици с безкрайна дължина.

Тема #4

- Ред на Фурие за дискретни във времето периодични сигнали
- Свойства на реда на Фурие за дискретни периодични сигнали
- Представяне на апериодични дискретни сигнали в честотната област, преобразуване на Фурие за дискретни сигнали (DTFT)
- **Свойства на DTFT**
- Дискретно преобразуване на Фурие (DFT) за дискретни сигнали
- Методи за изчисляване на ДПФ. Алгоритми за бързо преобразуване на Фурие (FFT).

Свойства на DTFT

Свойствата на DTFT са много подобни на съответните свойства на DTFS които вече разглеждахме.

■ Линеиност

$$F\{\sum b_i x_i(n)\} = \sum b_i F\{x_i(n)\} = \sum b_i X_i(\Omega)$$

Свойства на DTFT

■ Симетрия

Спектърът, $X(\Omega)$, за реална непериодична редица, $x(n)$, е симетричен:

$$X(-\Omega) = X^*(\Omega),$$

където $X^*(\Omega)$ е комплексно спрегнатата на $X(\Omega)$. Това се вижда при замяна на Ω с $-\Omega$ в

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

От $X(-\Omega) = X^*(\Omega)$ следва че амплитудния спектър е с четна симетричност:

$$|X(-\Omega)| = |X(\Omega)|,$$

а фазовия спектър е с нечетна симетричност:

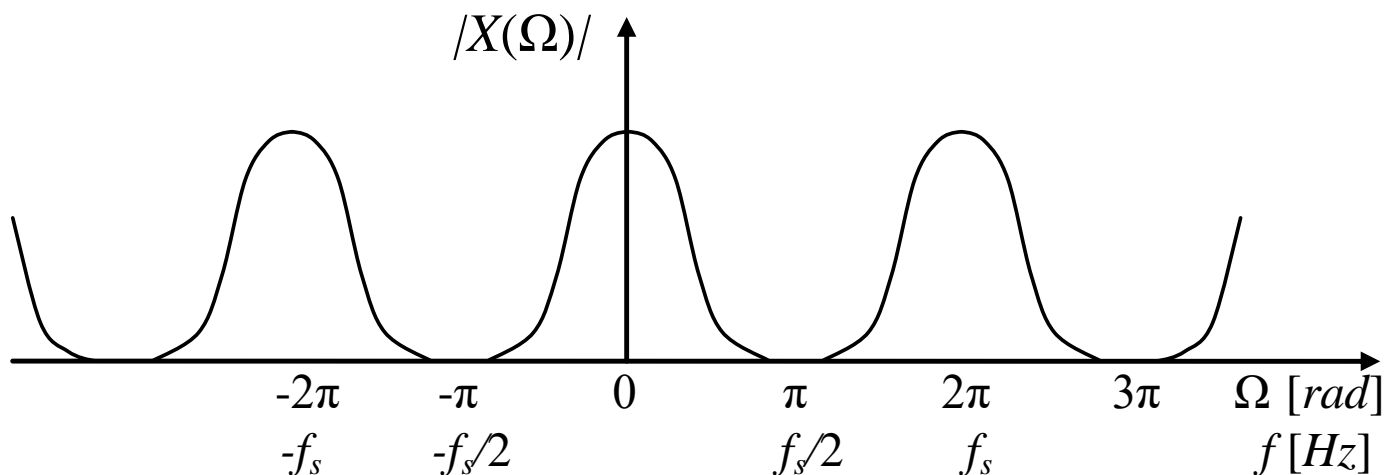
$$\arg[X(-\Omega)] = -\arg[X(\Omega)].$$

Свойства на DTFT

■ Периодичност

Дискретните сигнали (и редици) имат периодичен спектър, като това е в сила също и за спектъра $X(\Omega)$ получен след правото DTFT. Когато аргумента е нормализираната ъглова честота Ω [rad], периодът е 2π .

Когато аргумента е честотата на колебание f [Hz], периода е равен на честотата на дискретизация f_s .





Представяне на непериодични дискретни сигнали в честотната област, преобразуване на Фурие за дискретни сигнали (DTFT)

Времева област

Честотна област

Непрекъснат (аналогов) сигнал

Непериодичен спектър

Непериодичен сигнал

Непрекъснат спектър

Дискретен сигнал (ред)

Периодичен спектър

Периодичен сигнал

Дискретен спектър

Тъй като $x(n)$ е дискретен непериодичен сигнал, неговият спектър $X(\Omega)$ е едновременно периодичен и непрекъснат по отношение на честотата, Ω .

Свойства на DTFT

■ Отместване във времевата област

Ако

$$F\{x(n)\} = X(\Omega)$$

Тогава изместване на редицата $x(n)$ във времето води до:

$$F\{x(n-m)\} = X(\Omega) e^{-j\Omega m}$$

фазово изместване в честотната област.

Отместването на сигнала във времевата област не оказва влияние на амплитудния спектър а само на фазовия спектър.

Свойства на DTFT

■ Отместване в честотната област

Обратното преобразуване на Фурие за отместен в честотната област спектър се изразява като умножение на редицата във времевата област с комплексната експонента:

$$F^{-1}\{X(\Omega - \Omega_o)\} = x(n) e^{jn\Omega_o}$$

и също

$$F\{x(n) e^{-jn\Omega_o}\} = X(\Omega - \Omega_o)$$

Отместването в честотната област води до амплитудна модулация на сигнала във времевата област.

Свойства на DTFT

■ Равенство на Парсевал

За апериодични редици с крайна енергия равенството на Парсевал отразява еквивалентността на енергията изразена чрез времевото и честотно представяне на редицата.

За апериодична редица, $x(n)$, с крайна енергия, която има спектър $X(\Omega)$, равенството на Парсевал се изразява като

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

Поради периодичността на спектъра, мощността в честотната област се дефинира за един период, в рамките на 2π .

Свойства на DTFT

■ Конволюция

Да си припомним израза за линейната конволюция,

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$

и да приложим DTFT към двете страни на равенството. Тогава

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= F\{y(n)\} = F\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)\right\} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)e^{-j\Omega n} \end{aligned}$$

Свойства на DTFT

Тъй като $x(k)$ е функция на междинния аргумент k и не зависи от аргумента за време n , можем да разменим реда на сумиране. Отчитайки че изместване във времето на редица води до умножение с комплексна експонента в честотната област

$$F\{h(n-k)\} = H(\Omega) e^{-jk\Omega}$$

получаваме

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n-k) e^{-j\Omega n} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) H(\Omega) e^{-jk\Omega} = H(\Omega) X(\Omega), \end{aligned}$$

Свойства на DTFT

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega)$$

където $H(\Omega)$, $X(\Omega)$, и $Y(\Omega)$ са DTFT (или спектъра) за редиците $h(n)$, $x(n)$, и $y(n)$.

Това означава че линейната конволюция на две редици във времевата област отговаря на умножение на техните спектри В честотната област.

$H(\Omega)$ е честотната характеристика на ДЛИВ система отчитайки че тя е с комплексни стойности (поради Фурие преобразуването на импулсната характеристика $h(n)$), може да се използва и еквивалентното означение $H(j\Omega)$.

Свойства на DTFT

В полярна координатна система, комплексната честотна характеристика може да се запише като

$$H(j\Omega) = |H(j\Omega)| e^{j\arg[H(j\Omega)]}$$

където $|H(j\Omega)|$ и $\arg[H(j\Omega)]$ са съответно амплитудната честотна характеристика и фазовата честотна характеристика.

В Декартови координати:

$$H(j\Omega) = \operatorname{Re}[H(j\Omega)] + j\operatorname{Im}[H(j\Omega)]$$

където $\operatorname{Re}[H(j\Omega)]$ и $\operatorname{Im}[H(j\Omega)]$ са съответно реалната честотна характеристика и имагинерната честотна характеристика.

Свойства на DTFT

Отчитайки свойствата линейност и изместване във времето и прилагайки DTFT към двете страни на общия вид на разликовото уравнение за ДЛИВ система

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

получаваме представянето на честотната характеристика на каузална ДЛИВ система като дробно рационална функция:

$$H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\Omega k}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\Omega k}}.$$

Важно е да се отбележи че коефициентите a_k and b_k на разликовите уравнения и честотната характеристика са идентични.

Свойства на DTFT

■ Конволюция в честотната област

Поради идентичността на правото и обратно преобразуване на Фурие е в сила че конволюцията на два спектъра в честотната област съответства на умножение на съответните редици във времевата област:

$$F\{x(n)h(n)\} = X(k)*H(k),$$

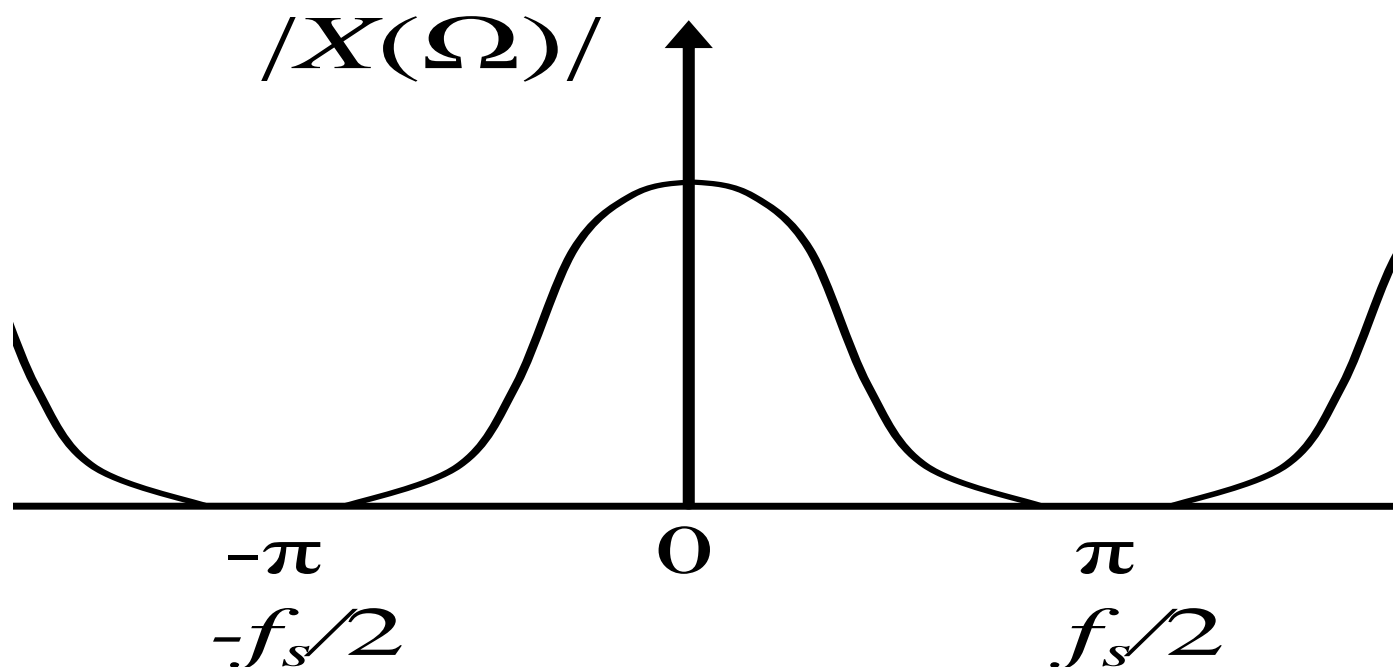
$$F^{-1}\{X(k)*H(k)\} = x(n)h(n)$$

Тема #4

- Ред на Фурие за дискретни във времето периодични сигнали
- Свойства на реда на Фурие за дискретни периодични сигнали
- Представяне на апериодични дискретни сигнали в честотната област, преобразуване на Фурие за дискретни сигнали (DTFT)
- Свойства на DTFT
- **Дискретно преобразуване на Фурие (DFT) за дискретни сигнали**
- Методи за изчисляване на ДПФ. Алгоритми за бързо преобразуване на Фурие (FFT).

Дискретно преобразуване на Фурие (DFT)

Можем ли да изчислим преобразуването на Фурие за дискретен сигнал, който е с крайна дължина (имаме краен брой измерени стойности), чрез използване на (цифров/двоичен) компютър?

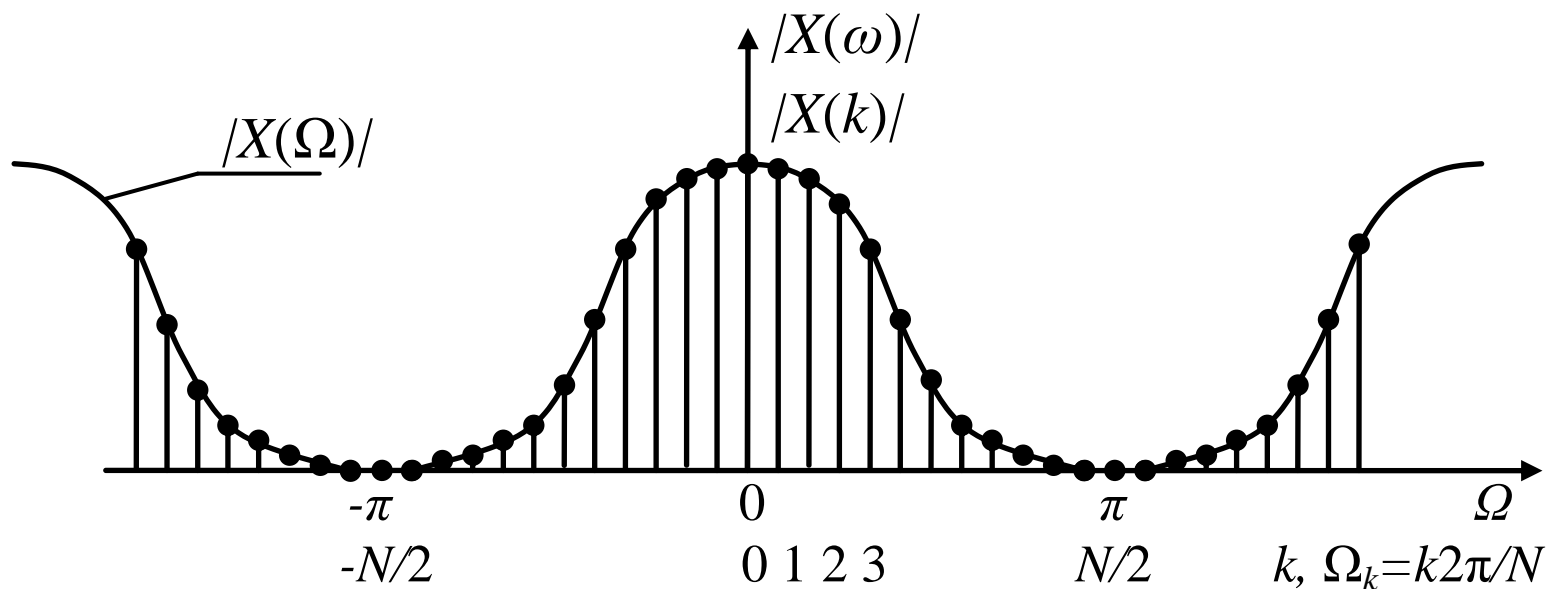


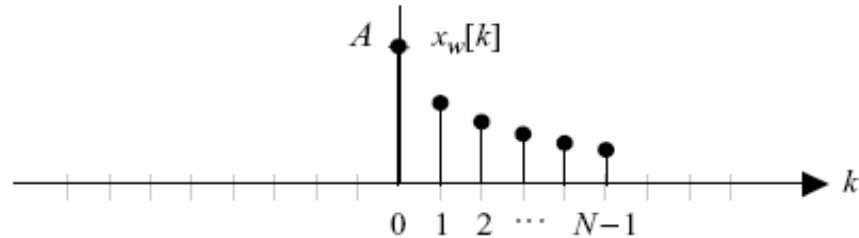
Дискретно преобразуване на Фурие (DFT)

Можем да създадем дискретен спектър $X(k) = X(k2\pi/N)$ чрез равномерна дискретизация на DTFT спектъра, $X(\Omega)$, посредством отчитането на N стойности в честотната лента 2π .

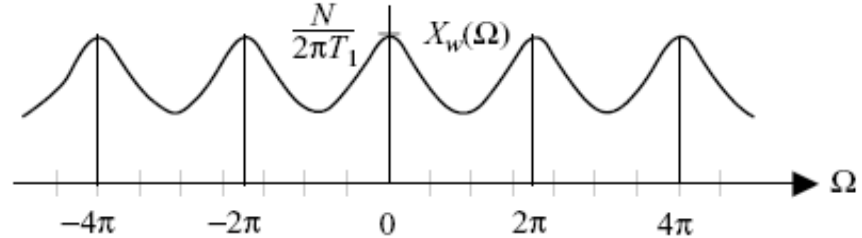
Броят, N , на отчетите в честотната лента 2π определя интервала на дискретизация и разрешаващата способност по честота:

$$\Delta\Omega = \Omega_1 = 2\pi/N$$

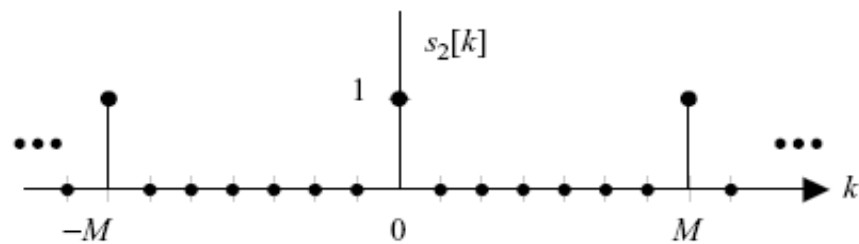




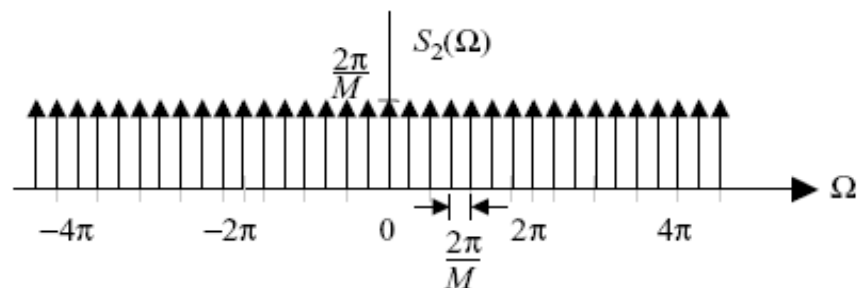
(k)



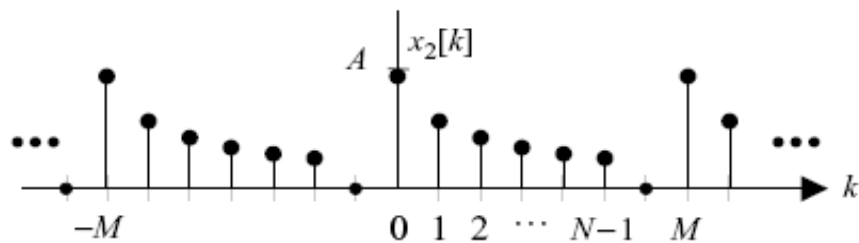
(l)



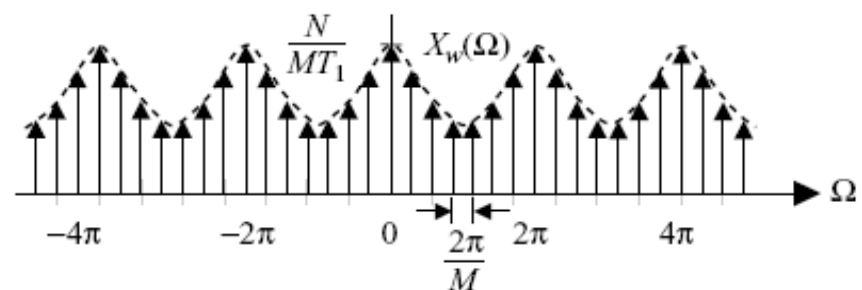
(m)



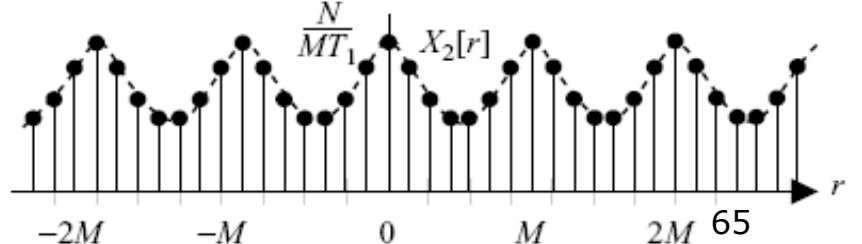
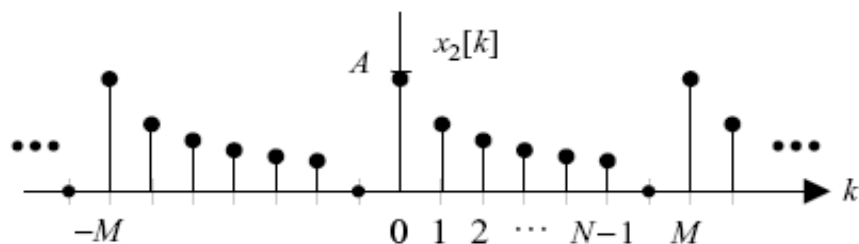
(n)



(o)

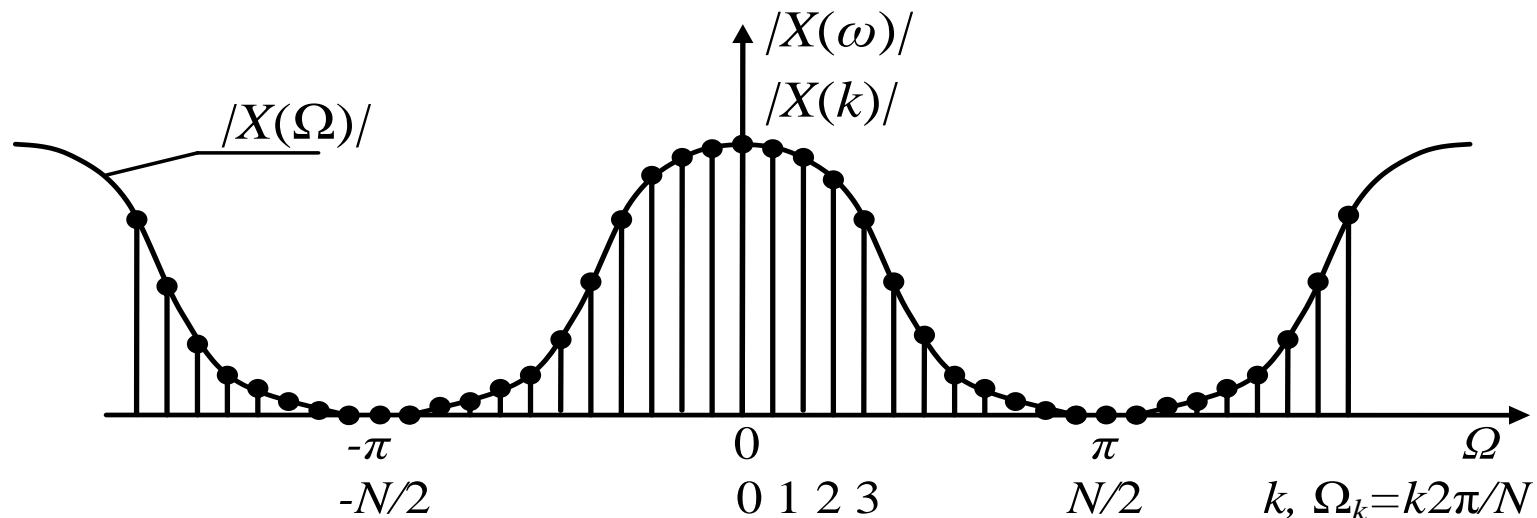


(p)



Дискретно преобразуване на Фурие (DFT)

Как да изчислим дискретния спектър, $X(k)$, директно от отчетите на неперIODичната дискретна редица $x(n)$?



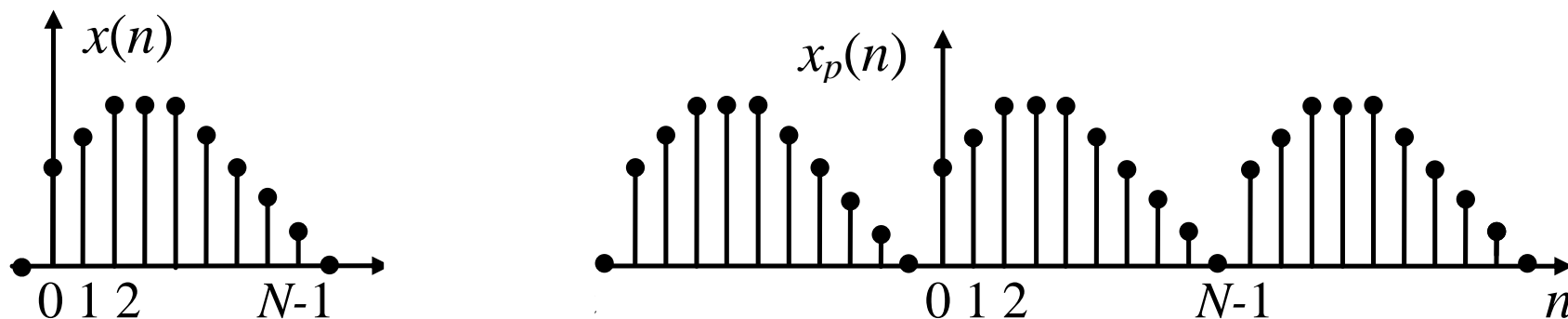
Тези N стойности от дискретния спектър, $X(k)$, могат да се изчислят за честоти $\Omega = k2\pi/N$, $k=0,1,\dots,N-1$, ако са дадени N последователни стойности на сигнала $x(n)$, като използваме уравненията за DTFS и отчитайки мащабирането въведено при извеждането на междинните резултати за у-то на DTFT

$$X(k) = X(\Omega_k) = N X_p(k).$$

Дискретно преобразуване на Фурие (DFT)



Нека непериодичната редица $x(n)$ е дефинирана в интервала $n=0,1,\dots,N-1$. Посредством периодично продължение на $x(n)$ с период N можем да създадем периодична редица $x_p(n)$,



така че да могат да бъдат приложени у-та за ред на Фурие:

$$x_p(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} X_p(k) e^{jk(2\pi/N)n}, \quad n \in \pm\infty$$

$$X_p(k) = a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x_p(n) e^{-jk(2\pi/N)n}$$

Дискретно преобразуване на Фурие (DFT)



Отчитайки че $x(n)$ и $x_p(n)$ съвпадат в интервала $n=0,1,\dots,N-1$, за спектъра на периодичния сигнал, $x_p(n)$, можем да запишем

$$\begin{aligned} X_p(k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-jk(2\pi/N)n} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk(2\pi/N)n} \quad \text{за } k = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Когато $N \rightarrow \infty$, дискретната нормализирана честота $\Omega_k = k2\pi/N$ преминава в непрекъснатата честота Ω , т.е. $\Omega_k \rightarrow \Omega$.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

Дискретно преобразуване на Фурие (DFT)



Така, DTFT, $X(\Omega)$, на непериодичната редица $x(n)$ е непрекъснатата функция на Ω , и трябва да се дискретизира.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

Дискретизация се постига посредством умножаване на $X(\Omega)$ с импулсна редица дефинирана в честотната област с DTFT

$$S(\Omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi m}{N}\right)$$

така че дискретната версия на DTFT, $X(\Omega_k)$, се получава като

$$X(\Omega_k) = X(\Omega)S(\Omega) = \frac{1}{N} \left(X_p(\Omega) \otimes \frac{\sin(0.5M\Omega)}{\sin(0.5\Omega)} e^{-\frac{j(M-1)\Omega}{2}} \right) \times \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi m}{N}\right)$$

Дискретно преобразуване на Фурие (DFT)



Имайки в предвид че $X(\Omega_k) = N X_p(k)$ и че ние желаем отчетите на $X(\Omega_k)$, i.e. $X(\Omega_k) \rightarrow X(k)$, $\Omega_k = k2\pi/N$, $k=0,1, \dots N-1$, получаваме

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk(2\pi/N)n}, \quad k = 0,1,\dots N-1,$$

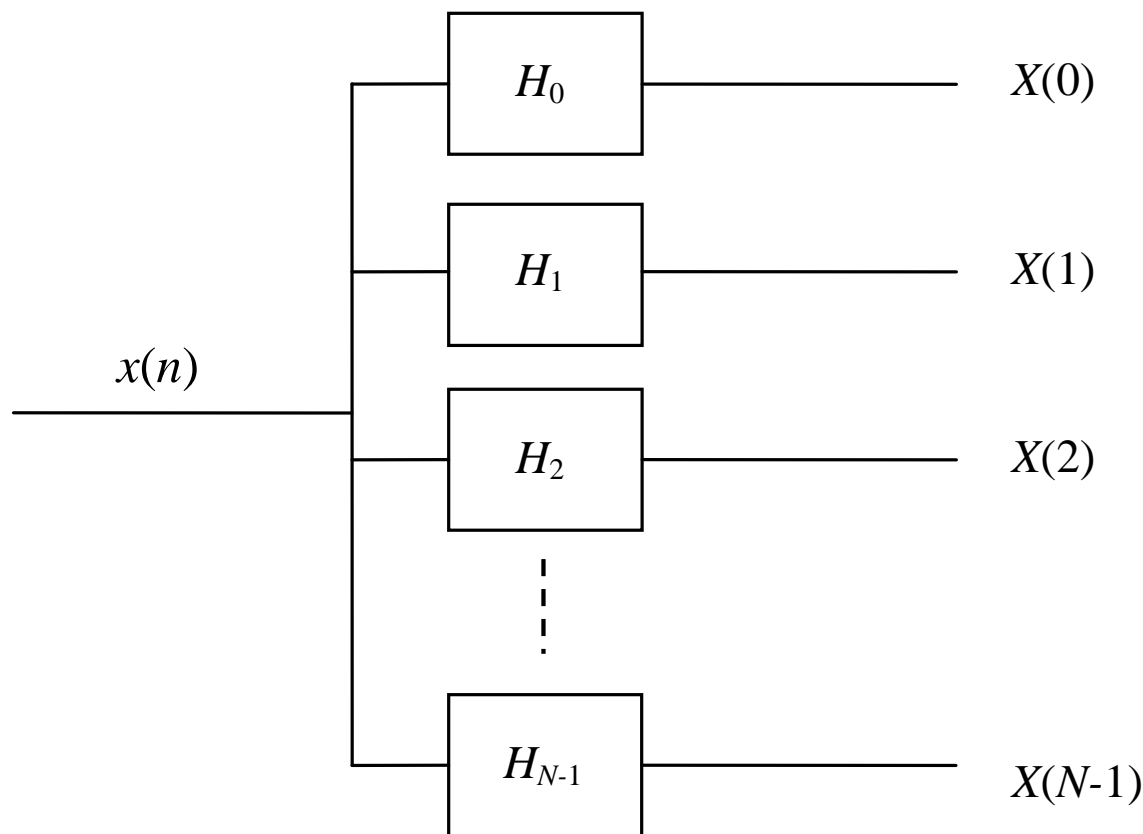
$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk(2\pi/N)n}, \quad n = 0,1,\dots N-1.$$

които представляват правото и обратно DFT на апериодичен сигнал $x(n)$ с N отчета във времевата област и N отчета от нейния непрекъснат спектър $X(\Omega)$ в честотната област. Тази двойка уравнения се нарича N -точково DFT.

Дискретно преобразуване на Фурие (DFT)



Един класически метод за изчисляване на DFT, използван главно преди появата на цифровите процесори, е посредством банка от ортогонални лентови филтри (filter-bank).



Дискретно преобразуване на Фурие (DFT)



Тези лентови филтри имат честотна характеристика $H_k(f)$ с централни честоти $f_k = kf_1$, за $k=0,1,..N-1$.

Тази схема за изчисляване на DFT може да се изпълни в аналогов и в цифров вариант. Амплитудата на сигнала в изхода на лентовите филтри е пропорционална на спектъра за честота f_k . Честотната лента на пропускане за филтрите $\Delta f = f_1$ трябва да е съизмерима с желаната разрешаваща способност по честота.

Когато банката филтри се изпълняват в цифров вид, обемът на изчисленията се контролира чрез избор на реда на филтрите. Посредством използване на филтри от по-нисък ред може да се прави компромис между точност и обем на изчисленията.

Тази схема позволява оценяването само на определени честотно компоненти в спектъра, без да се изчислява целия спектър.

Свойства на DFT

- **Линейност**
- **Симетрия**
- **Периодичност**
- **Изместване във времевата област**
- **Изместване в честотната област**
- **Уравнение на Парсивал**

Свойствата на DFT произлизат от тези на DTFT, и се изразяват чрез замяна на непрекъснатия спектър $X(\Omega)$ с дискретния спектър $X(k)$ и на интегралите със съответните суми.

Тема #4

- Ред на Фурие за дискретни във времето периодични сигнали
- Свойства на реда на Фурие за дискретни периодични сигнали
- Представяне на апериодични дискретни сигнали в честотната област, преобразуване на Фурие за дискретни сигнали (DTFT)
- Свойства на DTFT
- Дискретно преобразуване на Фурие (DFT) за дискретни сигнали
- Методи за изчисляване на ДПФ. Алгоритми за бързо преобразуване на Фурие (FFT).

Методи за изчисляване на DFT

DFT се използва в математиката и в приложения които изискват спектрален анализ на сигнали, линейна филтрация, кодиране и др. Обаче изчисляването на DFT директно от формулите с които е дефинирано е твърде бавно за практически задачи.

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk(2\pi/N)n} \quad , \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk(2\pi/N)n} \quad , \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Броят на математическите операции (сумиране и умножение) необходими за директното изчисляване на DFT може да се оцени като $O(N^2)$, т.е. общият обем на изчисленията е пропорционален на N^2 за N -точково DFT.

Методи за изчисляване на DFT

Според дефиницията на правото DFT, за изчисляване на всяка една от N комплексни стойности на $X(k)$ са необходими N комплексни умножения и $N-1$ комплексни сумирания.

Обема на изчисленията включва и умноженията с W_N^0 , които биха могли да се пропуснат, но това би изисквало по-сложен алгоритъм за обработка на този частен случай.

В общият случай на комплексна редица, $x(n)$, са необходими $4N$ умножения на реални числа и $2N-2$ сумирания на реални числа. Така че са необходими общо N^2 комплексни умножения и N^2-N комплексни сумирания.

Например, за $N=1024$, обемът на математическите операции за изчисляване на DFT е $\sim 2 \cdot 10^6$.

Методи за изчисляване на DFT

Заради симетрията на правото и обратно DFT (обратното DFT се различава само по знака в аргумента на комплексната експонента и по мащабиращият коефициент $1/N$) обема на изчисленията за обратното DFT е съизмерим с този на правото.

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk(2\pi/N)n} \quad , \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk(2\pi/N)n} \quad , \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Когато изчисляването на целия спектър не е наложително, и е необходимо оценяване то му само за M честотни съставляващи ($M \ll N$), обема на операциите може да се намали значително.

Методи за изчисляване на DFT

Повечето алгоритми за ускорено изчисляване на DFT отчитат свойствата периодичност и симетрия на фазовия вектор W_N :

$$W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n}$$

$$W_N^{kn} = (W_N^{k(N-n)})^*$$

Такива са алгоритмите предложени от Runge, Danielson Lanczos, Goertzel, и др.

Някой от тези алгоритми са особено ефективни за изчисляване на DFT за малък набор от предварително избрани честоти. (Това е необходимо например при разпознаване на сигналите за тонално избиране на номера (Dual-tone multi-frequency, DTMF)).

Бързо преобразуване на Фурие (FFT)



Голям напредък за бързото изчисляване на DFT е направен през 1965, когато е публикувана работата на Cooley и Tukey. Те предлагат алгоритъм за изчисляване на DFT за съставна стойност на N , която е произведение от няколко прости числа m_i , за $N=m_1.m_2.m_3.....m_p$.

Публикуването на тази статия предизвиква публикуването на нови алгоритми за които са известни под общото название Бързо преобразуване на Фурие (FFT).

FFT алгоритъма е най-ефективен за $N=m^p$, където m се нарича основа (radix) на FFT алгоритъма.

Накратко ще разгледаме един алгоритъм при основа 2 (radix-2), който е сред най-често използваните алгоритми за FFT.



Бързо преобразуване на Фурие (FFT)

Когато размерността на DFT е $N=2^P$ може да се постигне значително съкращаване на обема на изчисленията чрез отчитане на свойствата *периодичност* и *симетричност* на фазовия вектор W_N .

Нека $x(n)$ да е редица с N отчета, като $N=2^P$. Прилагайки децимация по 2 към редицата $x(n)$ получаваме две нови редици $x_e(n)$ и $x_o(n)$ с размерност $N/2$, които съдържат четните и нечетни отчети на първоначалната редица:

$$\begin{aligned}x_e(n) &= x(2n), \quad n=0,1,\dots,(N/2)-1, \\x_o(n) &= x(2n+1), \quad n=0,1,\dots,(N/2)-1.\end{aligned}$$

Бързо преобразуване на Фурие (FFT)



Можем да изразим DFT с размерност N посредством две DFT с размерност $N/2$ за децимираните редици, $x_e(n)$ и $x_o(n)$:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \sum_{n=\langle \text{even} \rangle} x_e(n) W_N^{kn} + \sum_{n=\langle \text{odd} \rangle} x_o(n) W_N^{kn} = \\ &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n) W_N^{2kn} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n+1) W_N^{(2n+1)k}, \quad k=0,1,\dots,N-1. \end{aligned}$$

Бързо преобразуване на Фурие (FFT)



Тъй като $W_N^2 = W_{N/2}$, за $X(k)$ можем да запишем:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n)W_{N/2}^{kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n+1)W_{N/2}^{kn} = \\ &= X_e(k) + W_N^k X_o(k) \quad , k=0,1,\dots,N-1. \end{aligned}$$

където $X_e(k)$ и $X_o(k)$ са DFT с размерност $N/2$ за четните и нечетни части на редиците. Тук $X_e(k)$ и $X_o(k)$, са периодични с период $N/2$:

$$X_e(k+N/2)=X_e(k) \quad \text{и} \quad X_o(k+N/2)=X_o(k).$$

Бързо преобразуване на Фурие (FFT)

Освен това, отчитаме че $W_N^{k+N/2} = -W_N^k$ и тогава

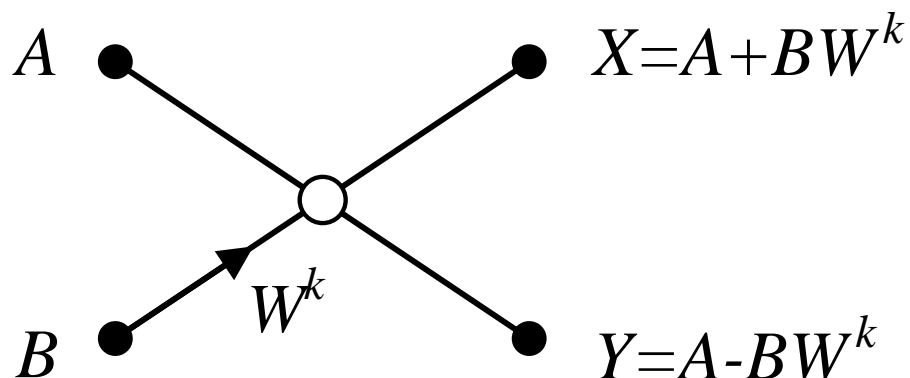
$$X(k) = X_e(k) + W_N^k X_o(k) \quad , k=0,1,\dots,N-1.$$

може да се представи с двете уравнения за реконструкция:

$$X(k) = X_e(k) + W_N^k X_o(k) \quad , k=0,1,\dots,(N/2)-1,$$

$$X(k+N/2) = X_e(k) - W_N^k X_o(k) \quad , k=0,1,\dots,(N/2)-1.$$

които могат да се представят съвместно посредством операцията *пеперуда*, изразена графично като



Бързо преобразуване на Фурие (FFT)

$$X(k) = X_e(k) + W_N^k X_o(k) \quad , k = 0, 1, \dots, (N/2)-1 ,$$

$$X(k + N/2) = X_e(k) - W_N^k X_o(k) \quad , k = 0, 1, \dots, (N/2)-1 .$$

Съгласно тези у-я обема на изчисленията за DFT е:

- $(N/2)^2$ комплексни умножения за изчисляване на $X_e(k)$,
- $(N/2)^2$ комплексни умножения за изчисляване на $X_o(k)$,
- $N/2$ комплексни умножения за изчисляване на $W_N^k X_o(k)$,

Така общият брой комплексни умножения е $N^2/2 + N/2$, което за големи стойности на N е половината от броя на операциите необходим за директната формула за право DFT.



Бързо преобразуване на Фурие (FFT)

По същия начин можем да приложим процедурата за децимация към $X_e(k)$ and $X_o(k)$, за да получим по-нататъшно намаляване на броя на операциите.

В крайна сметка тази схема на разлагане на четни и нечетни редици води до получаването на единични отчети от редицата $x(n)$. Обаче DTF от един отчет е равен на самия отчет:

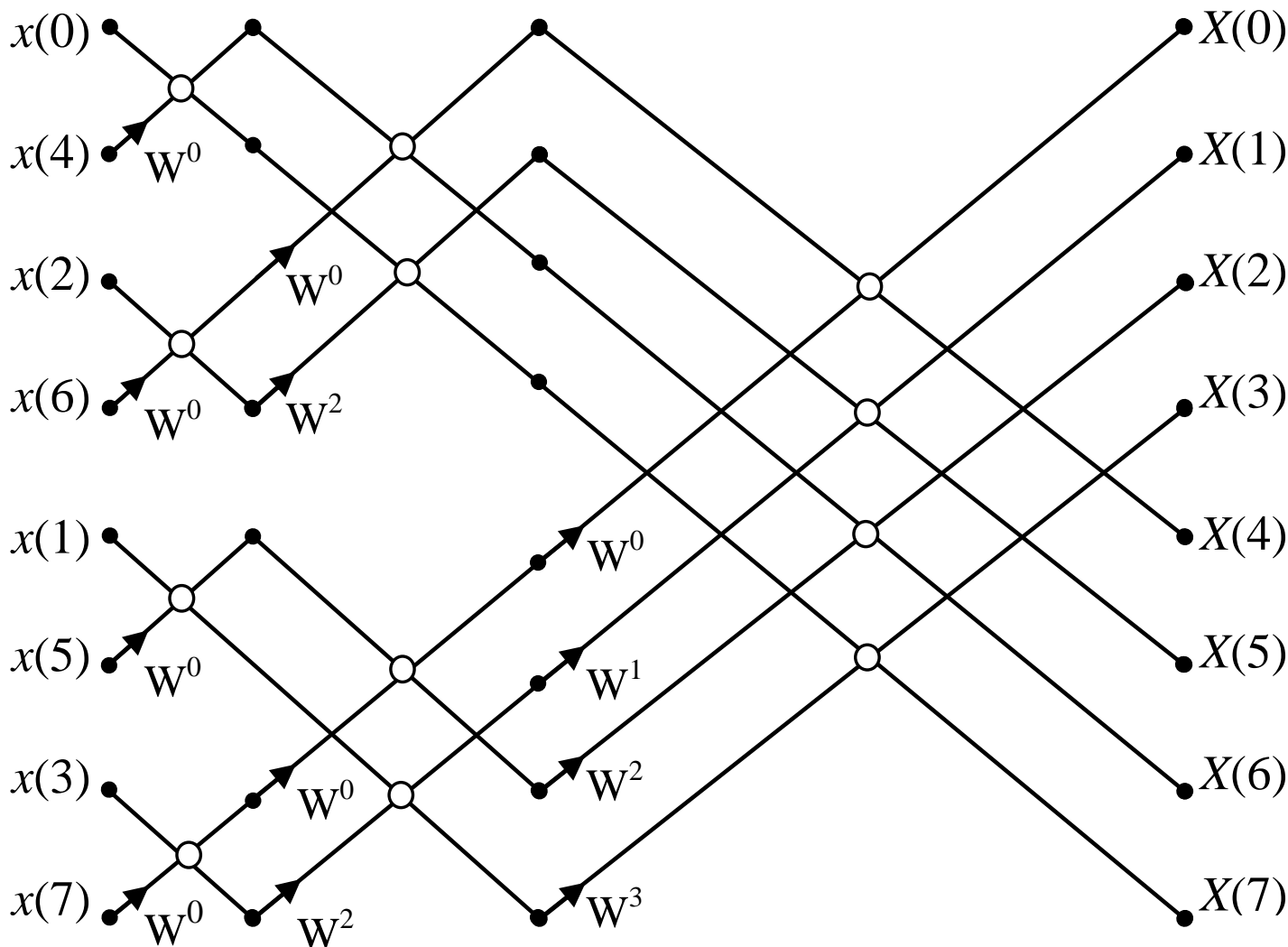
$$X(0) = \sum_{n=0}^0 x(0)W_N^0 = x(0), \quad k = 0$$

Общия брой на стъпките за редица с дължина $N=2^p$ е p . След получаване на редиците от по един отчет от $x(n)$, можем да изчислим $X(k)$ по формулите за реконструкция

$$X(k) = X_e(k) + W_N^k X_o(k) \quad , \quad k = 0, 1, \dots, (N/2)-1 ,$$

$$X(k + N/2) = X_e(k) - W_N^k X_o(k) \quad , \quad k = 0, 1, \dots, (N/2)-1 .$$

Бързо преобразуване на Фурие (FFT)



Бързо преобразуване на Фурие (FFT)

Така след p последователни децимации, входната редица $x(n)$ е пренаредена. Това се реализира чрез размяна на последователността на битовете в индексите на отчетите и се нарича *bit-reversed* метод за адресиране на паметта. Този метод е реализиран във почти всички съвременни процесори за ЦОС.

$x(n)$	Binary code	Reversed code	Reordered $x(n)$
$x(0)$	000	000	$x(0)$
$x(1)$	001	100	$x(4)$
$x(2)$	010	010	$x(2)$
$x(3)$	011	110	$x(6)$
$x(4)$	100	001	$x(1)$
$x(5)$	101	101	$x(5)$
$x(6)$	110	011	$x(3)$
$x(7)$	111	111	$x(7)$

Бързо преобразуване на Фурие (FFT)

За FFT с размерност N , общият брой на комплексните умножения е $(N/2)\log_2 N$, а броя на комплексните сумирания е $N\log_2 N$. Така общият обем на изчисленията необходими за DFT и FFT при различна размерност N е

N	N^2	$(N/2)\log_2 N$	<i>Reduction</i>
4	16	4	4,0
8	64	12	5,3
16	256	32	8,0
32	1 024	80	12,8
64	4 096	192	21,3
128	16 384	448	36,6
256	65 536	1 024	64,0
512	262 144	2 304	113,8
1024	1 048 676	5 120	204,8

Възможни въпроси за изпита

- За какви сигнали е приложим редът на Фурие (Discrete in Time Fourier Series)?
- Защо сумата на реда на Фурие за редици е сходяща ?
- Какъв е броя на хармоничните представящи периодична редица чрез реда на Фурие?
- Какъв е смисълът на равенството на Парсевал?
- За какви сигнали е приложимо преобразуването на Фурие за редици (DTFT)?
- Обяснете разликите между преобразуването на Фурие за редици (DTFT) и дискретното преобразуване на Фурие.

