

Цифрова обработка на сигнали

Тема #2

*Дискретни във времето сигнали и
системи*



Съдържание на Тема #2

Дискретни във времето сигнали,
редици

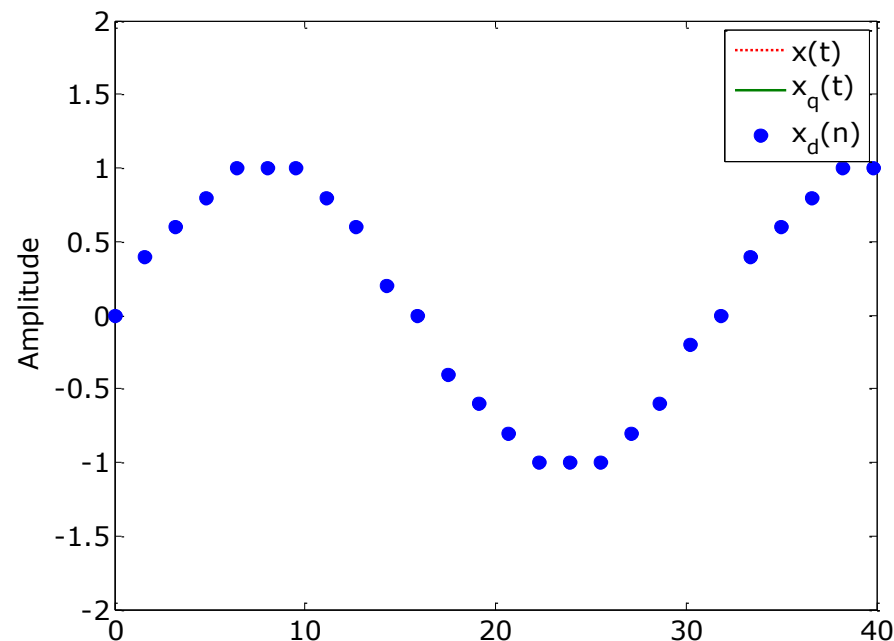
Типове цифрови системи

Импулсна характеристика и сума на
конволюцията за цифрова ДЛИВ
система

Диференчни (разликови) уравнения
за дискретна ЛИВ система

Системи с КИХ и БИХ

Илюстриране на архитектури
базирани на различни варианти на
диференчните уравнения



$$x(t) \rightarrow x_q(t) \rightarrow x_d(nTs) \equiv x_d(n) \equiv x(n)$$

Дискретни във времето сигнали и системи



За реалните сигнали, които са ограничени по амплитуда (и затихващи), е в сила:

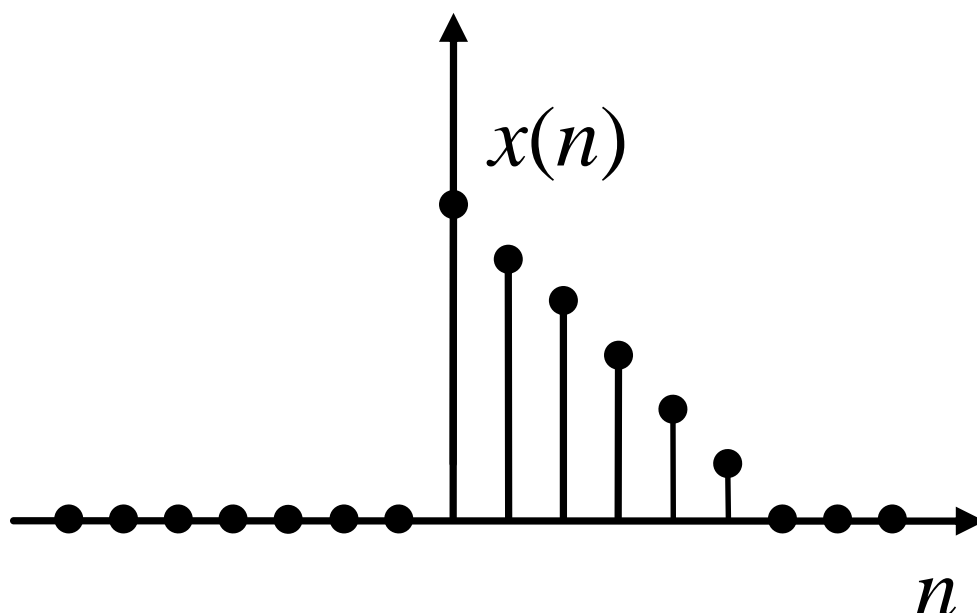
- Крайна амплитуда $|x(n)| < A$, за $n \in \pm\infty$.

- Крайна енергия $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |x(n)|^2 < A$

- Крайна мощност $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{n=+N} |x(n)|^2$

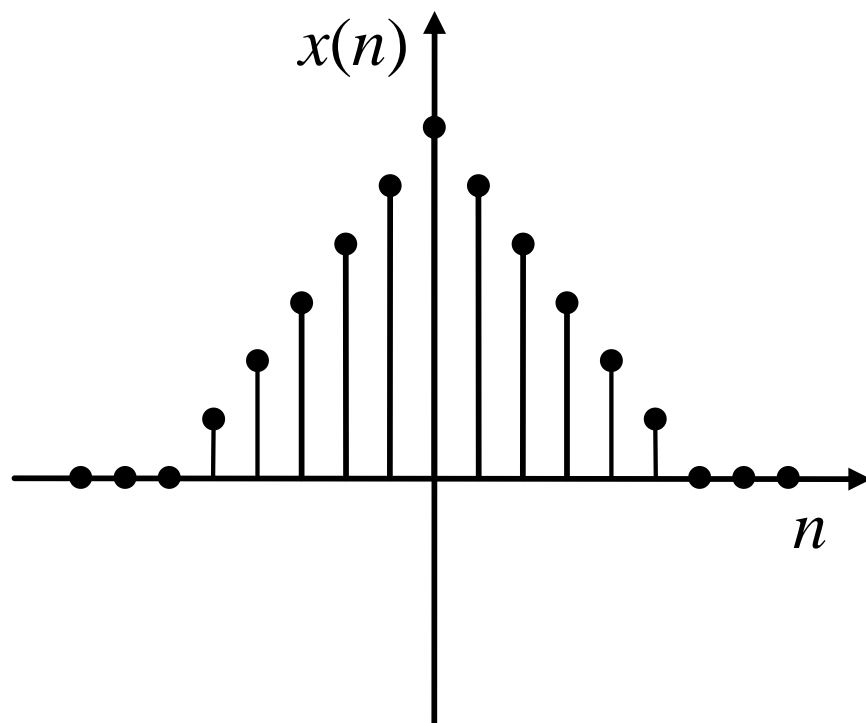
Каузални сигнали

- Редицата $x(n)$, се нарича каузална когато за $n < 0$, $x(n) \equiv 0$

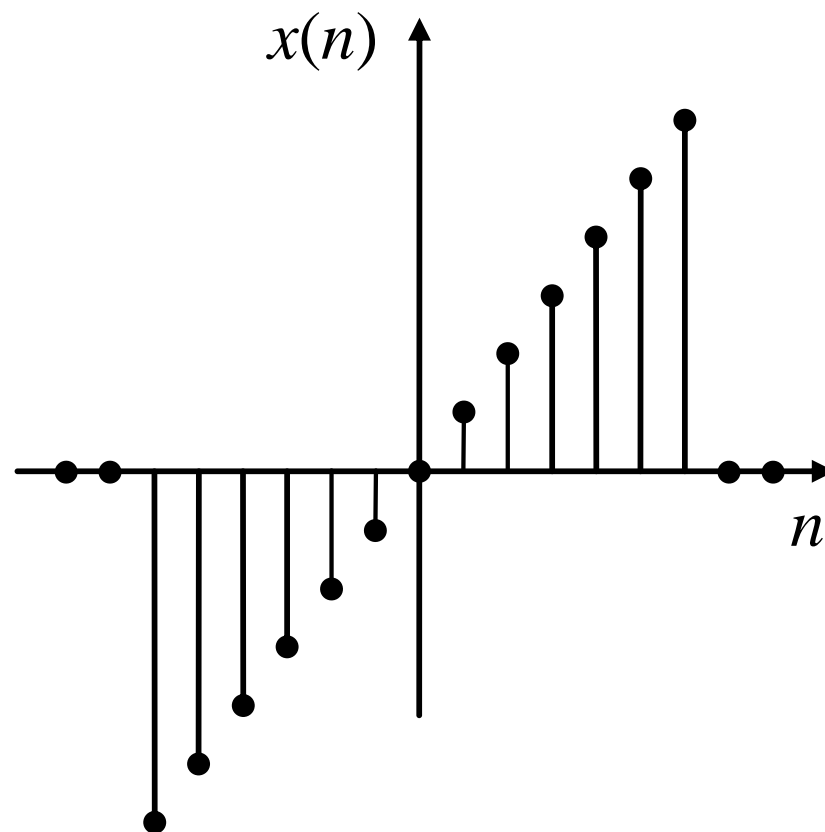


Каузалните системи са физически реализуеми в реално време

Четни и нечетни редици



Ако $x(-n) = x(n)$,
четна редица, $x_e(n)$



Когато $x(-n) = -x(n)$,
Нечетна редица, $x_o(n)$

Разлагане на четни и нечетни компоненти



$$x(n) = x_e(n) + x_o(n),$$

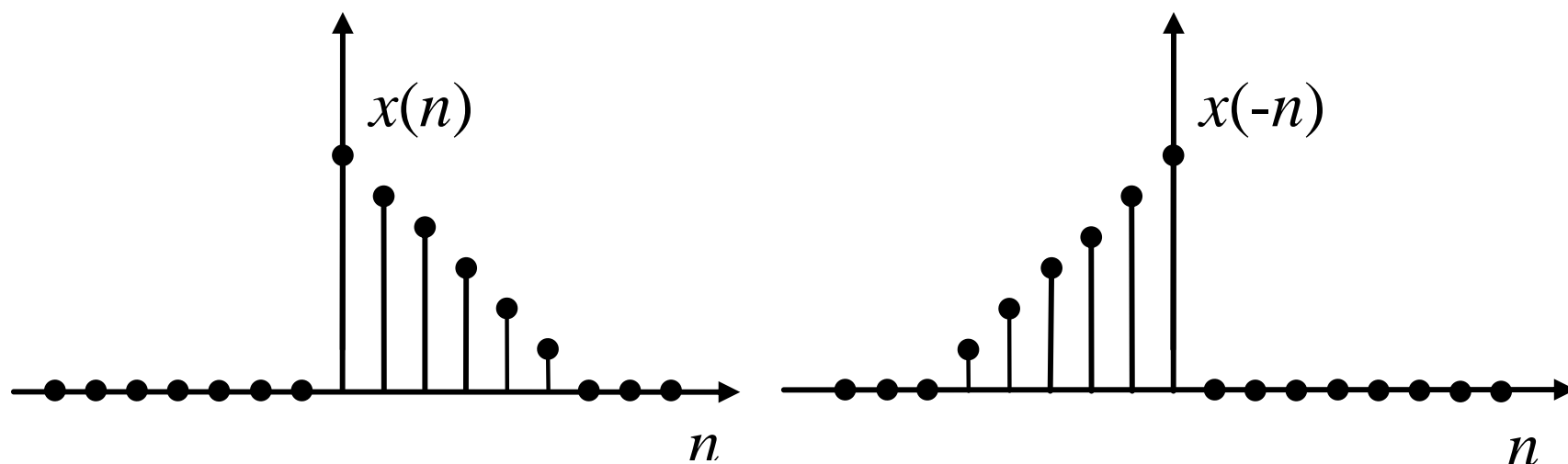
Всеки сигнал $x(n)$ може да се представи като сума от четни и нечетни компоненти

$$x_e(n) = \frac{1}{2} \{x(n) + x(-n)\};$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2} \{x(n) - x(-n)\}.$$

Преобразувания на независимата променлива

Огледална редица



Огледалната редица $x(-n)$, е огледално симетрична на $x(n)$ спрямо $n=0$

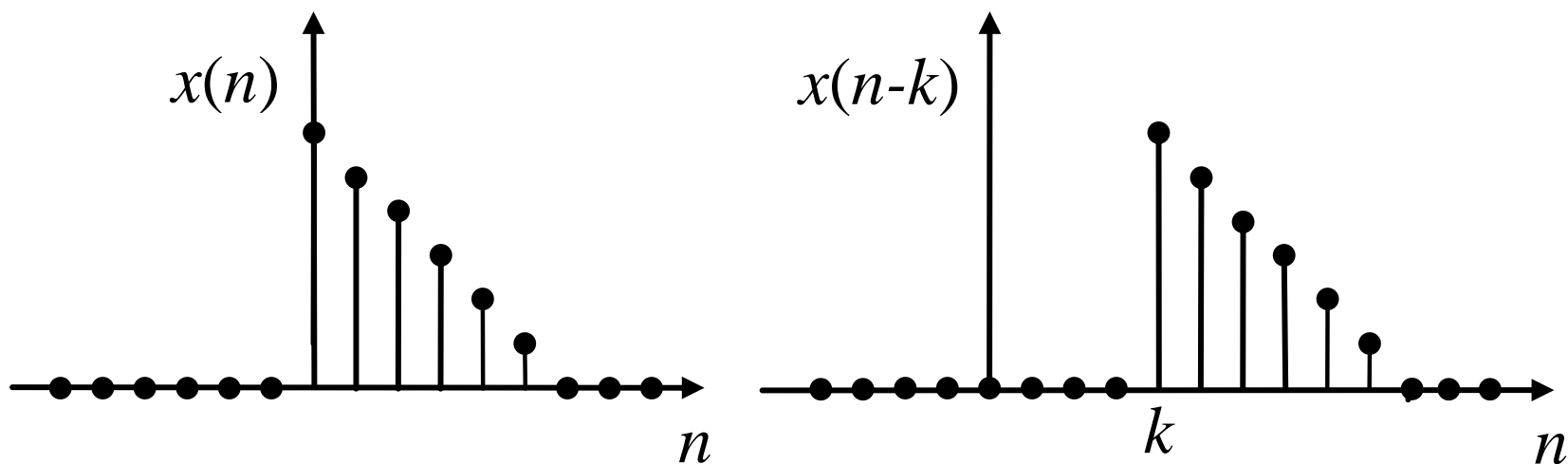
Преобразувания на независимата променлива

■ Мащабиране във времето

Чрез замяна на независимата променлива n с an , където a е цяло число, ние получаваме разредена (децимирана, *down-sampled*) версия на оригиналната редица. Тази операция съответства на намаляване на честотата на дискретизация до f_s/a .

Преобразувания на независимата променлива

■ Изместване във времето



Редицата $x(n-k]$ е преместена на k отчета надясно, спрямо оригиналната редица $x(n]$.

Редицата $x(n-k]$ се нарича закъсняла версия на редицата $x(n]$.

Преобразувания на независимата променлива

■ Периодичност на редиците

Ако редицата $x(n)$ е периодична с период N , тя е също периодична с период pN , където p е произволно цяло число. Най-малкото цяло число на периодичност, N , се нарича основен период на редицата.

Нека да допуснем съществуването на редицата $x_N(r)$, която съвпада с редицата $x(n)$ за N на брой отчета за последователни стойности на n , т.е $x_N(r) = x(n)$ за $r = \langle N \rangle$. Тогава тази периодична редица може да бъде означена със стойностите си за един период $x_N(r)$

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_N(r - mN)$$

където: $r = \langle N \rangle$, $n = (r - mN)$.

(Извън интервала N , редицата $x_N(r)$ е равна на нула)

Операции с редици

- Събиране $z(n) = x(n) + y(n)$
- Умножение $z(n) = x(n) y(n)$; $z(n) = a x(n)$.
- Сума на редица

$$\begin{array}{ccc}
 \text{число} \nearrow & S = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n) & S_n = \sum_{n=-\infty}^n x(n) \\
 & & \uparrow \\
 & & \text{редица}
 \end{array}$$

- Разлика на редици

-- Възходяща разлика от 1ви ред $\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$

-- Възходяща разлика от 2ри ред

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 x(n) &= \nabla x(n) - \nabla x(n-1) = \\
 &= x(n) - 2x(n-1) + x(n-2)
 \end{aligned}$$

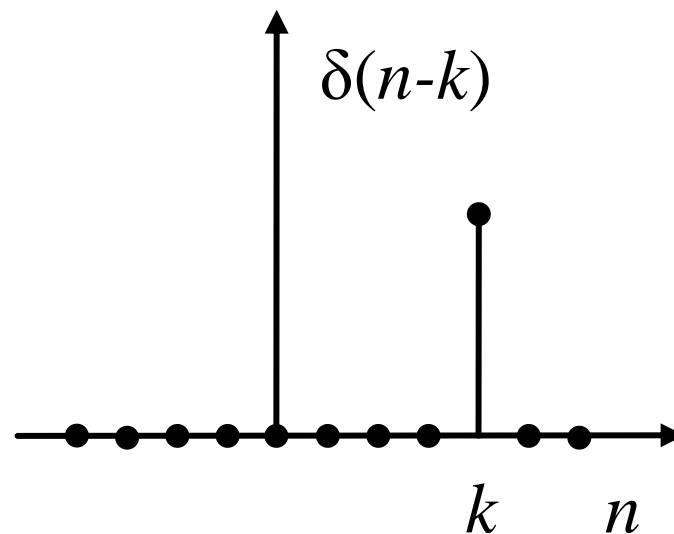
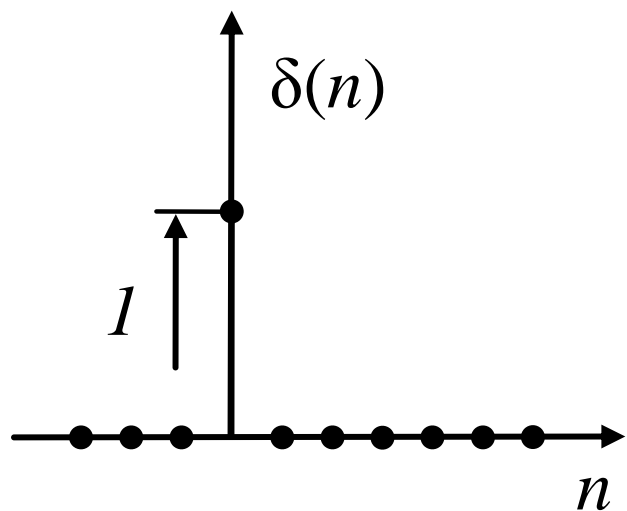
-- Низходяща разлика от 1ви ред $\Delta x(n) = x(n-1) - x(n)$

Типови редици

Единичен импулс $\delta(n)$:

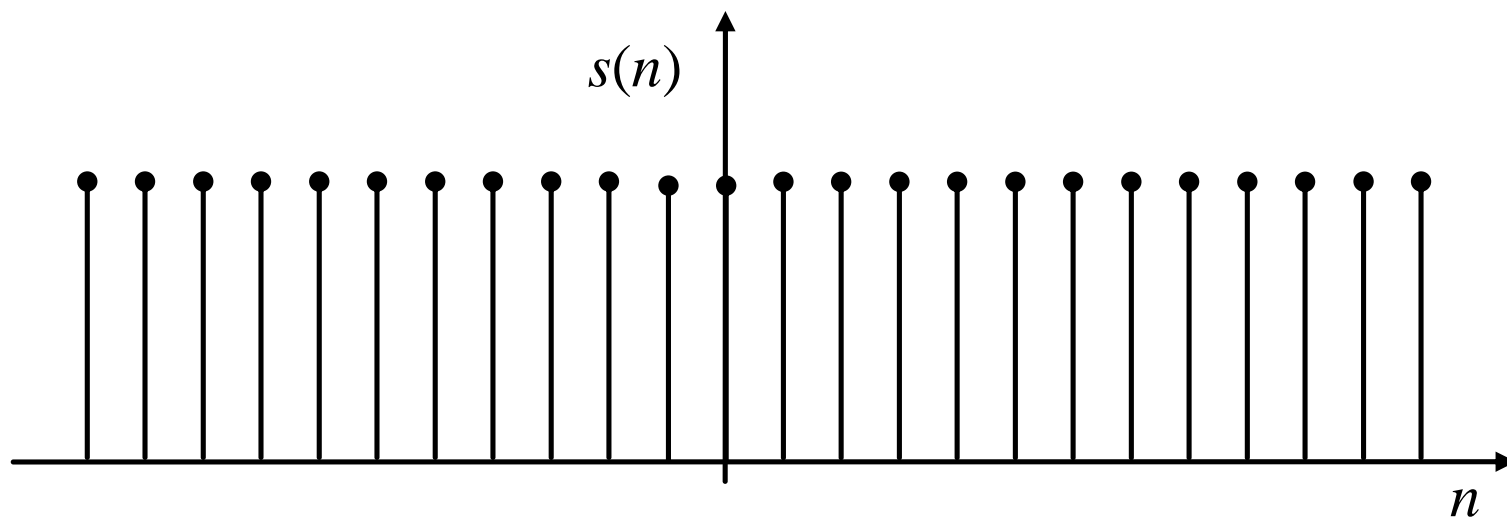
$$\delta(n) = 1, \text{ за } n = 0;$$

$$\delta(n) = 0, \text{ за } n \neq 0.$$



Типови редици

- Дискретизираща (импулсна) редица $s(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(n - k)$



Процеса на дискретизация на непрекъснатия сигнал $x(t)$ може да се дефинира като умножение с дискретизиращата редица $s(nTs)$:

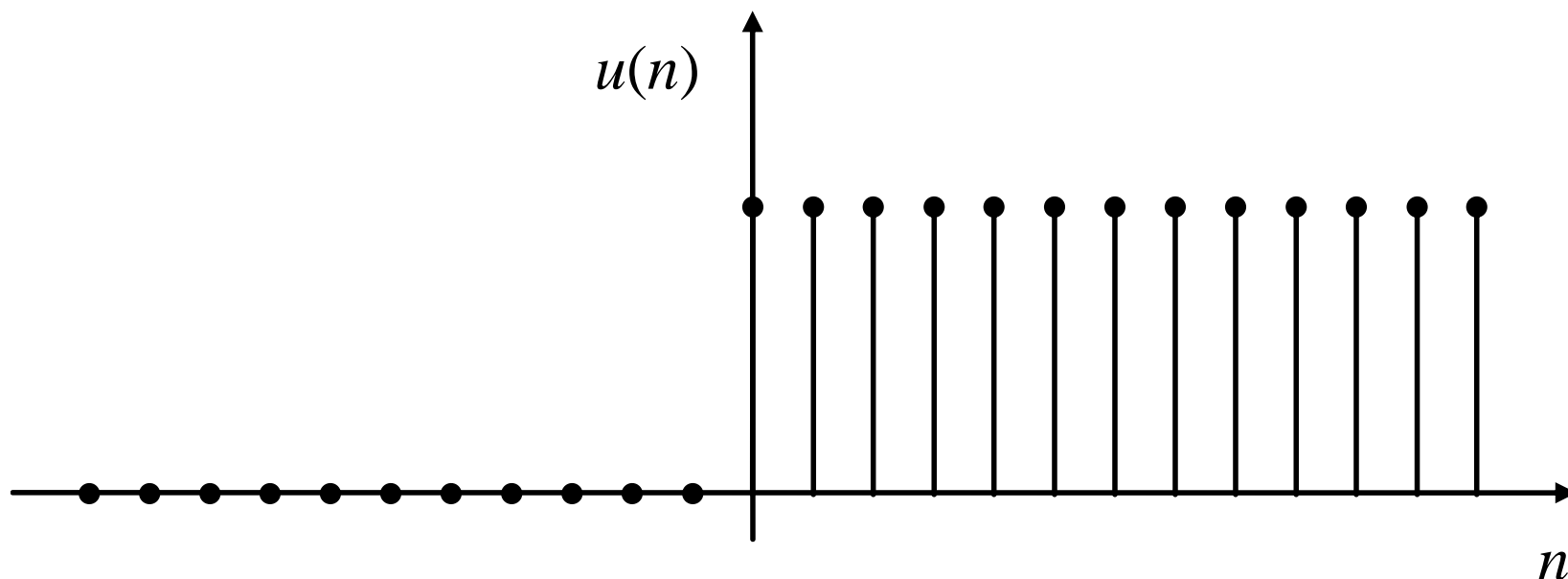
$$x(nTs) = x(t) s(nTs)$$

Типови редици

- Единичен скок (единично стъпало) $u(n)$:

$$u(n) = 1, \text{ за } n \geq 0$$

$$u(n) = 0, \text{ за } n < 0$$



Произведението между произволна редица $x(n)$ и единичното стъпало $u(n)$ е каузална редица.

Свойства на единичния импулс и единичното стъпало

- Филтриращо свойство на единичния импулс:

$$x(n) \delta(n) \Rightarrow [\dots 0, 0, 0, 0, x(0), 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots]$$

$$x(n) \delta(n-k) \Rightarrow [\dots 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, x(k), 0, 0, 0, \dots]$$

- Единичният импулс може да се представи като първа разлика от единичното стъпало:

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

- Единичният скок може да се представи като сума от редицата на единичния импулс:

$$u(n) = \sum_{m=-\infty}^n \delta(m)$$

$(m=n-k)$

Комплексна експоненциална редица

- Комплексната експоненциална редица се дефинира като

$$x(n) = c a^n,$$

където c и a са комплексни числа.

- Интересен частен случай е $c=1$ и $a = e^{j\Omega}$, като в този случай се получава:

$$x(n) = e^{j\Omega n},$$

където Ω е нормализираната ъглова честота.

- Съгласно формулата на Ойлер (Euler), комплексната експоненциална редица може да се представи с реална и имажинерна компонента като:

$$x(n) = \cos(\Omega n) + j \sin(\Omega n)$$

Сравнение на свойствата на комплексните експоненциални редици и непрекъснатите комплексни експоненти

Свойство 1

- При комплексни експоненциални редици кръговата честота се означава с Ω , докато при непрекъснатите комплексни експоненти се означава с ω .
- Размерността на ω е $[rad/s]$, докато ъгловата честота Ω е нормализирана и се измерва в $[rad]$, т.е. Времето не присъства в явен вид.
- Процеса на дискретизация на непрекъснатата комплексна експонента, т.е преминаването от ъглова честота ω към нормализирана честота Ω е

$$e^{j\omega t} \rightarrow e^{j\omega n T_s} = e^{j\Omega n}$$

където сме положили $\omega T_s = \Omega$.

- След заместването на ъгловата честота ω с честотата на трептене f получаваме:

$$\Omega = \omega T_s = 2\pi f / f_s.$$

Сравнение на свойствата на комплексните експоненциални редици и непрекъснатите комплексни експоненти

Свойство 2

За комплексна експонента с честота $\Omega + 2\pi$ можем да запишем

$$e^{j(\Omega + k2\pi)n} = e^{j\Omega n} e^{jk2\pi} = e^{j\Omega n}.$$

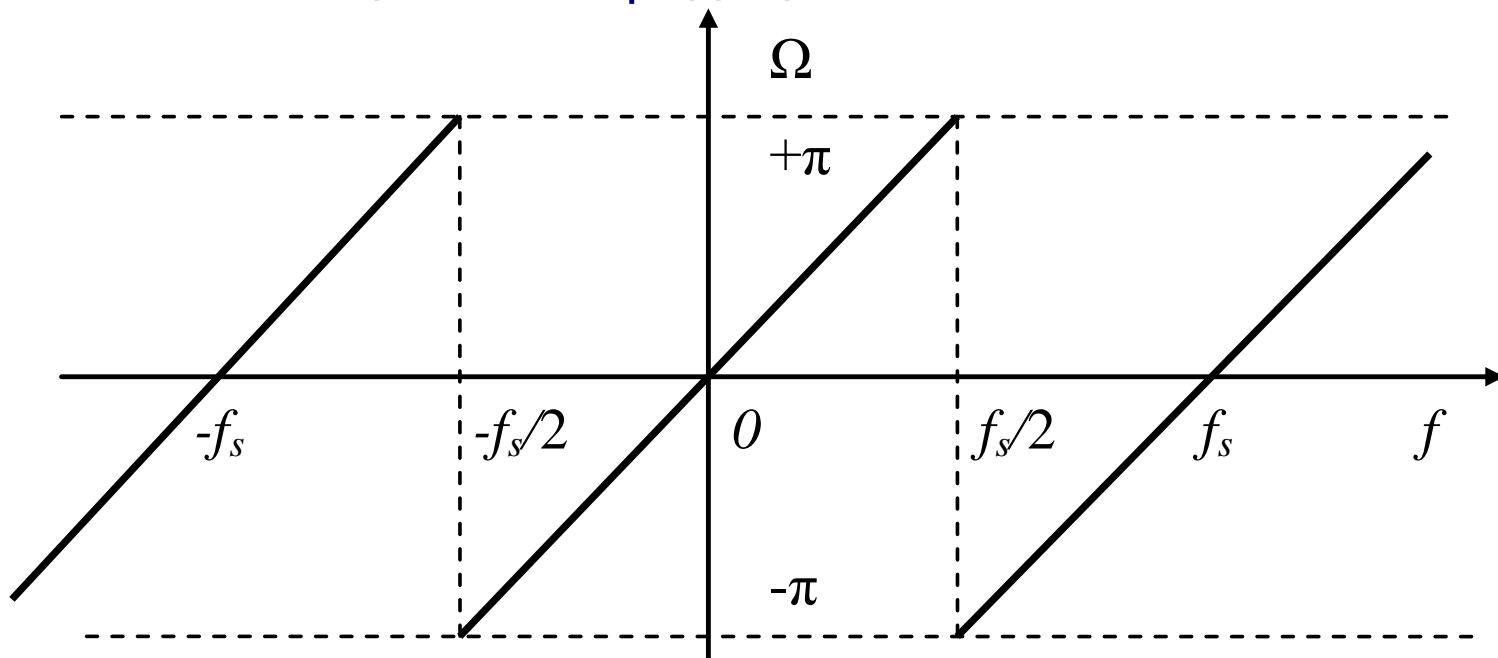
На това основание можем да твърдим че всяка комплексна експоненциална редица е периодична с нормализирана ъглова честота и съдържа всичките си честотни компоненти в обхвата 2π .

Извън този интервал те се повтарят с период 2π и следователно е достатъчно да отчитаме стойностите на експонентата само в един период от 2π . Най-често ще разглеждаме интервалите

$$\Omega = [-\pi, +\pi] \quad \text{или} \quad \Omega = [0, 2\pi].$$

Сравнение на свойствата на комплексните експоненциални редици и непрекъснатите комплексни експоненти

- Връзка между честотата на колебание f често използвана за характеризирането на непрекъснати сигнали и нормализираната ъглова честота Ω използвана в експоненциалните редици:





Сравнение на свойствата на комплексните експоненциални редици и непрекъснатите комплексни експоненти

Свойство 3

Непрекъснатата комплексна експонента $e^{j\omega t}$ е периодична във времето за всяка стойност на ъгловата честота ω .

Дискретната експоненциална редица $e^{j\Omega n}$ е периодична с период N (спрямо независимата променлива n) само при определени съотношения между Ω и N .

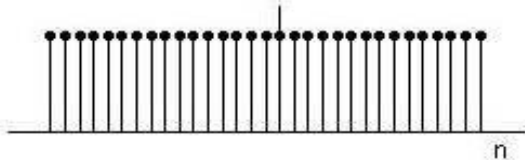
И действително, за да бъде $e^{j\Omega n}$ периодична, трябва да е в сила:

$$e^{j\Omega(n+N)} = e^{j\Omega n} e^{j\Omega N} = e^{j\Omega n}.$$

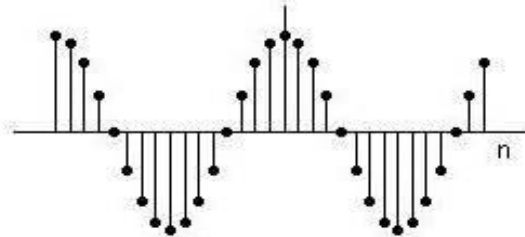
Това е вярно само ако $\Omega N = k2\pi$, където k е цяло число. Ако това изискване не е изпълнено, дискретизацията на периодичния непрекъснат сигнал $e^{j\omega t}$ би довело до неперiodична редица $x(n)$.

Сравнение на свойствата на комплексните експоненциални редици и непрекъснатите комплексни експоненти

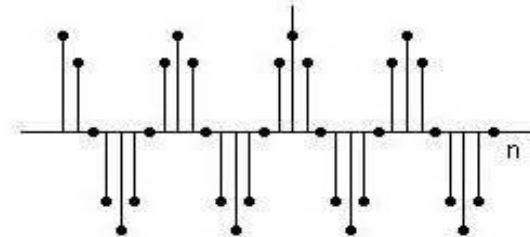
$$x(n) = \cos(0 \cdot n) = 1$$



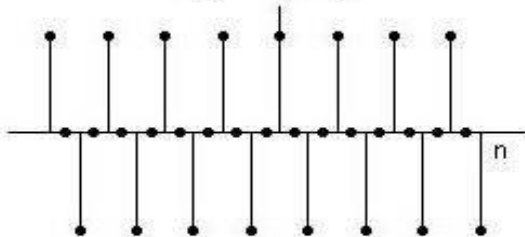
$$x(n) = \cos(\pi n / 8)$$



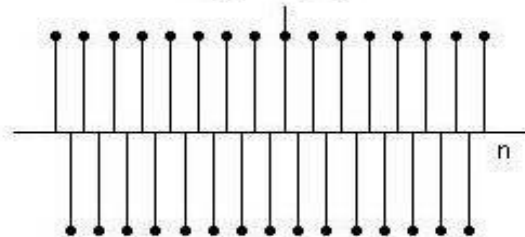
$$x(n) = \cos(\pi n / 4)$$



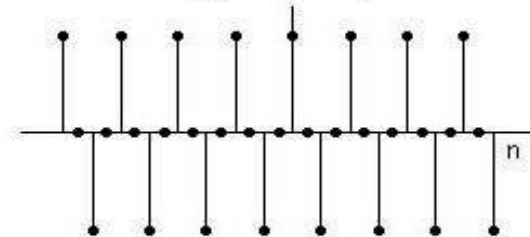
$$x(n) = \cos(\pi n / 2)$$



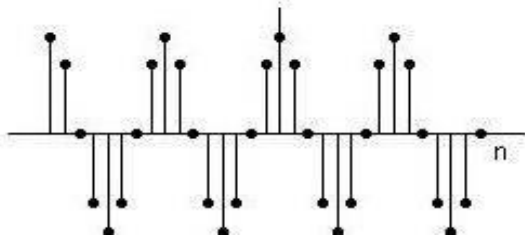
$$x(n) = \cos(\pi n)$$



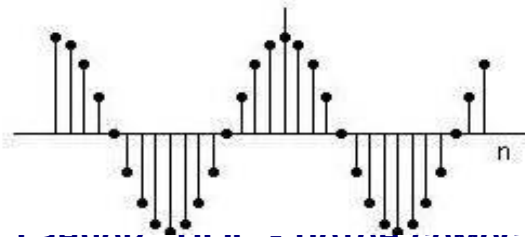
$$x(n) = \cos(3\pi n / 2)$$



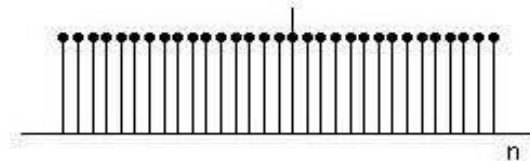
$$x(n) = \cos(7\pi n / 4)$$



$$x(n) = \cos(15\pi n / 8)$$



$$x(n) = \cos(2\pi n)$$



Сравнение на свойствата на комплексните експоненциални редици и непрекъснатите комплексни експоненти

Свойство 4.

Всяка непрекъснатата комплексна експонента с честота ω_1 има безброй хармонично свързани експоненти с честоти $k\omega_1$, където k е цяло число.

Броят на хармонично свързаните дискретни комплексни експоненциални редици, които са периодични с период N , е краен и е равен на N .

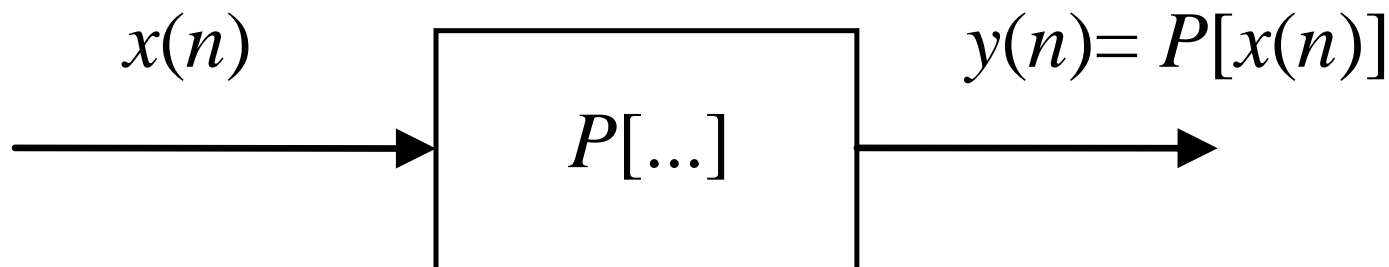
Съдържание на Тема #2

- Дискретни във времето сигнали, редици
- Типове цифрови системи
- Импулсна характеристика и сума на конволюцията за цифрова ДЛИВ система
- диференчни уравнения за дискретна ЛИВ система
- Системи с КИХ и БИХ
- Илюстриране на архитектури базирани на различни варианти на диференчните уравнения

Дефиниция на цифрова система

- Една цифрова система може да бъде дефинирана посредством оператора на преобразованието $P[...]$

$$y(n) = P[x(n)]$$



Статични и динамични системи

- **Статични** или системи без памет: ако изходният сигнал $y(n)$ в произволен момент от времето n зависи само от входния сигнал $x(n)$ в този момент.

$$y(n) = A x(n).$$

- **Динамични** цифрови системи или системи с памет: ако изходният сигнал $y(n)$ в произволен момент от времето n зависи не само от входния сигнал $x(n)$ в същия момент от времето но също и от входния и/или изходния сигнал в предишни моменти от времето.

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

Обратими и необратими цифрови системи

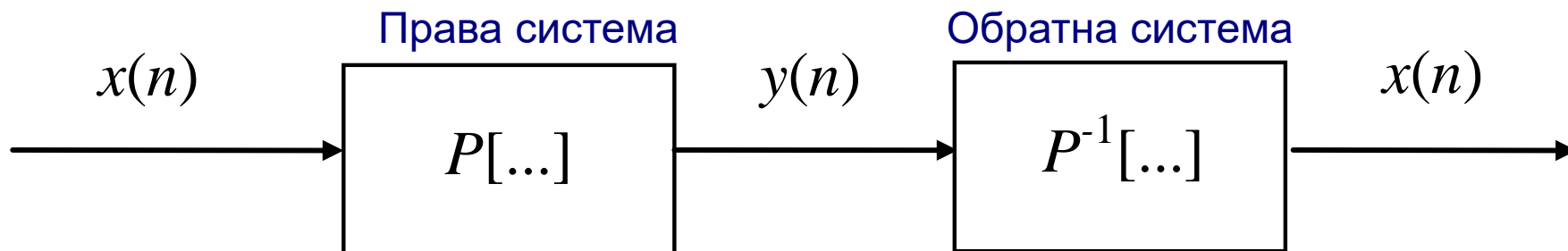


Една цифрова система

$$y(n) = P[x(n)]$$

е обратима ако съществува единствен обратен оператор P^{-1} ,
за който

$$x(n) = P^{-1}[y(n)]$$



Примери за обратима и необратима цифрова система

- Пример за обратима система е:

$$y(n) = 2x(n)$$

и съответната обратна система е:

$$x(n) = 0.5y(n).$$

- Два примера за необратими цифрови системи:

$$y(n) = 0$$

$$y(n) = x^2(n)$$

Каузална и некаузална системи

- **Каузална система:** ако изходният сигнал $y(n)$ в произволен момент n зависи от предишни и сегашни стойности на входния и изходния сигнали, но не зависи от бъдещи стойности на входния сигнал.

$$y(n) = A x(n)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

- **Некаузална система:**

$$y(n) = x(n) - x(n+1).$$

Инвариантни и неинвариантни във времето системи

- Една цифрова система е инвариантна във времето ако оператора на преобразуването и P не зависи от времето n , т.е. реакцията на системата не зависи от момента на подаване на входния сигнал, а зависи само от стойностите му. Ако за произволна редица $x(n)$ е в сила:

$$y(n) = P[x(n)]$$

$$y(n-k) = P[x(n-k)]$$

то системата представена от оператора P е инвариантна.

Инвариантните във времето системи се наричат също системи с постоянни коефициенти или стационарни системи.

Инвариантни и неинвариантни във времето системи

- **Неинвариантни системи:** при които оператора на преобразуването зависи от времето n .

$$y(n) = n x(n)$$

Цифровите системи могат да бъдат програмирани така че автоматично да се адаптират към изменящите се условия, посредством донастройка на параметрите на алгоритъма, с цел поддържане на оптимален режим на работа. Това се явява огромно предимство пред аналоговите системи.

Линейни и нелинейни системи

- **Линейни:** ако операторът P не зависи от стойността на входния сигнал (или от изходния сигнал) на системата
- За линейните системи е валиден принципа на суперпозицията (адитивност), т.е ако:

$$y_1(n) = P[x_1(n)] \quad \text{и} \quad y_2(n) = P[x_2(n)],$$

то

$$y(n) = y_1(n) + y_2(n) = P[x_1(n) + x_2(n)].$$

т.е реакцията на системата към входен сигнал който се явява тегловна сума от сигнали е равна на съответната тегловна сума от реакциите на системата към всеки от индивидуалните входни сигнали.

$$P\left[\sum_k a_k x_k(n)\right] = \sum_k a_k P[x_k(n)]$$

където a_k и b_k са тегловни коефициенти.

Свойства на линейните системи

- **Хомогенност:** Изменението на стойността на входния сигнал предизвиква свързано изменение на стойностите на изходния сигнал в същата степен.
- **Статична линейност:** входно-изходната (т.е. проходната) характеристика на линейна система за статичен входен сигнал (константа) е права линия преминаваща през началото на равнината x - y . Това означава че изходния сигнал е мащабирана версия на входния сигнал: $y = kx$, където k е константа.
- **Синусоидална идентичност:** при синусоидален входен сигнал с дадена честота, изходния сигнал е също синусоидален със същата честота. Ако системата е статична, изходния сигнал има същата фаза с входния сигнал, а амплитудата е мащабирана като $y = kx$.

Детерминирани и стохастични системи



- **Детерминирана система:** система която генерира един и същ изходен сигнал при всяко подаване на определен входен сигнал. (Елемент на случайност не се наблюдава)
- **Стохастична система:** съдържа определен елемент на случайност или променливо поведение поради което системата не генерира една и съща изходна стойност при всяко подаване на определено входно въздействие.

Устойчиви и неустойчиви системи

- Една система е устойчива ако при произволни начални условия и ограничен по амплитуда входен сигнал, изходния сигнал на системата също е с крайна стойност. Тази дефиниция на стабилност се нарича "bounded input, bounded output (BIBO)".

За пример разглеждаме устойчивостта на цифровия суматор:

$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(k)$$

- За входен сигнал с амплитуда 0 изходният сигнал също е 0.
- Ако подадем на входа единичен импулс, на изходът получаваме единично стъпало.
- Ако подадем на входа единично стъпало $x(n) = u(n)$, на изхода ще получим:

$$y(n) = \sum_{k=0}^n u(k) = (n+1)u(n)$$

Съдържание на Тема #2

- Дискретни във времето сигнали, редици
- Типове цифрови системи
- Импулсна характеристика и сума на конволюцията за цифрова ДЛИВ система
- Диференчни уравнения за дискретна ЛИВ система
- Системи с КИХ и БИХ
- Графично представяне на архитектури базирани на различни варианти на разликовите уравнения

Импульсна характеристика и сума на конволюцията на ДЛИВ система

- Изходният сигнал, $h(n)$, на цифрова система, получен при подаването на входа на единичен импулс $\delta(n)$ по определение се нарича импульсна характеристика на системата:

$$h(n) = P[\delta(n)]$$

За ДЛИВ система по дефиниция е валидно че

$$h(n-k) = P[\delta(n-k)]$$

Импулсна характеристика и сума на конволюцията на ДЛИВ система

- В общият случай нека да разгледаме сигнала $x(n)$ като

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$$

и да приложим линейния оператор P към двете страни на равенството за $x(n)$

$$y(n) = P[x(n)] = P\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)\right]$$

Припомняйки си свойствата на ДЛИВ системите:

$$y(n-k) = P[x(n-k)]$$

Импулсна характеристика и сума на конволюцията на ДЛИВ система

а също и че

$$P\left[\sum_k a_k x_k(n)\right] = \sum_k a_k P[x_k(n)]$$

Можем да формулираме израза за изходния сигнал като

$$\begin{aligned} y(n) &= P[x(n)] = \\ &= P\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)P[\delta(n-k)] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \end{aligned}$$

т.е. за ДЛИВ система при произволен входен сигнал изходът е

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$

Импулсна характеристика и сума на конволюцията на ДЛИВ система

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$

Ако в сумата на конволюцията заменим "n-k" с "r" и след това "r" с "k", получаваме другата форма на записване на сумата на конволюцията:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

За краткост, конволюцията на две редици често се записва като:

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

където символът "*" е операторът на конволюцията.



Импулсна характеристика и сума на конволюцията на ДЛИВ система

- Сумата на конволюцията е важен инструмент в ЦОС тъй като позволява да се изчисли изхода на системата при произволен входен сигнал $x(n)$, и известна импулсна характеристика $h(n)$ на системата.
- Конволюцията на произволна редица $x(n)$ с редицата на единичният импулс $\delta(n)$ е равна на първоначалната редица $x(n)$

$$x(n) = x(n) * \delta(n)$$

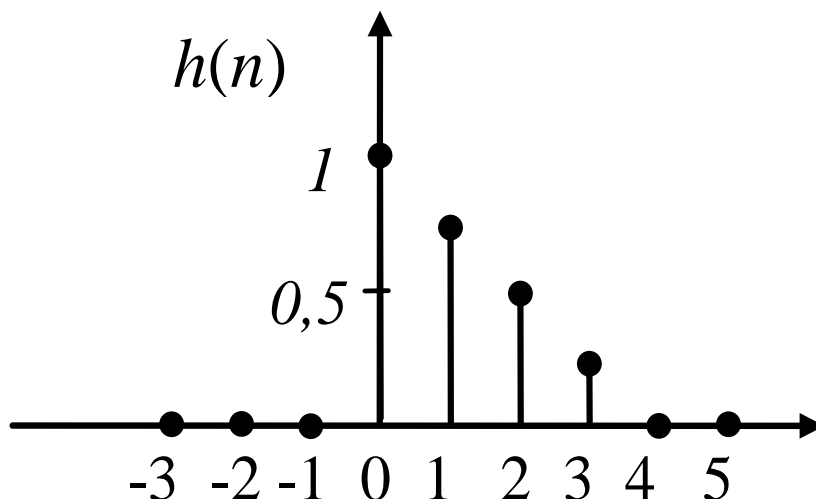
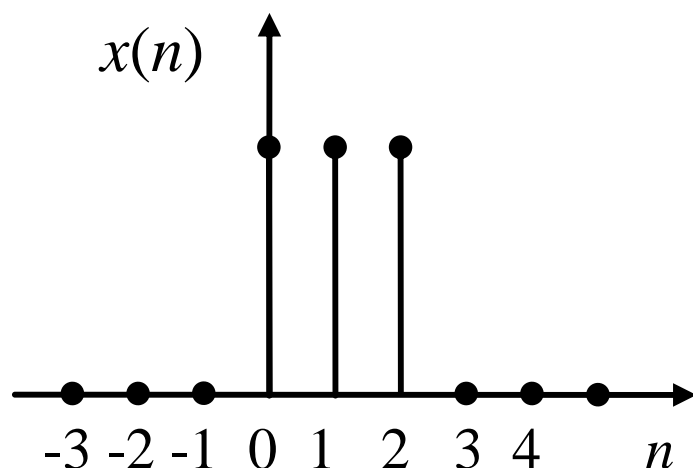
- Когато $y(n) = h(n) * x(n)$ се извършва за непериодични редици $x(n)$ и $h(n)$ говорим за *линейна конволюция*, *апериодична конволюция* или за краткост само за *конволюция*.
- В случая на периодични редици се въвежда понятието *кръгова конволюция*, *циклична конволюция* или *периодична конволюция*.

Пример: Изчисляване на реакцията на система посредством сумата на конволюцията

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$

$$x(n)=[1.0 \quad 1.0 \quad 1.0]$$

$$h(n)=[1.0 \quad 0.75 \quad 0.5 \quad 0.25]$$

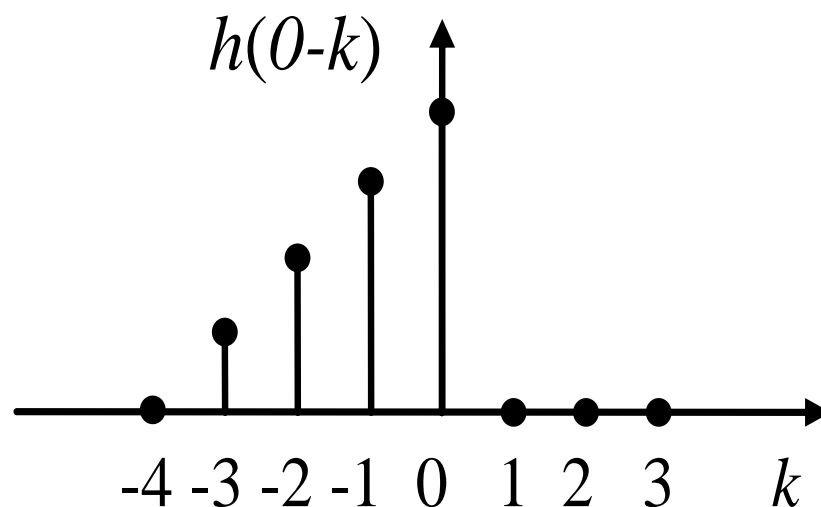
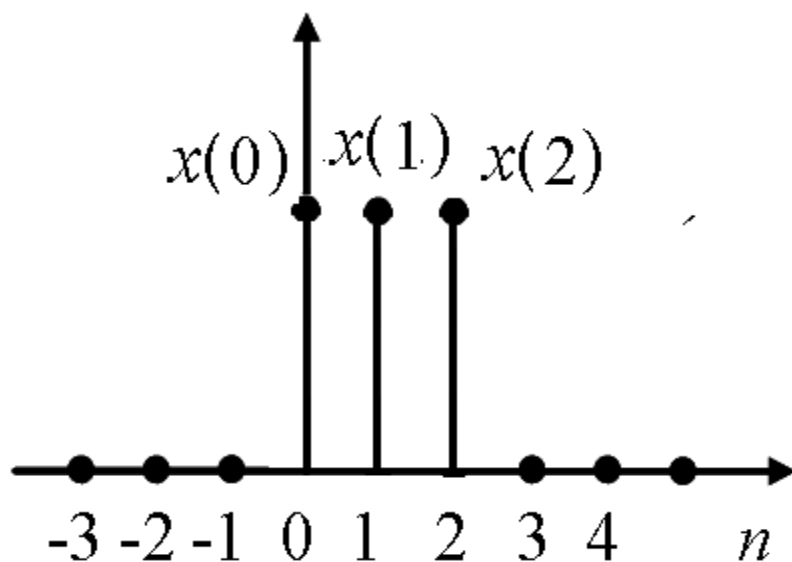


Пример: Изчисляване на реакцията на система посредством сумата на конволюцията

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \quad \begin{aligned} x(n) &= [1.0 \quad 1.0 \quad 1.0] \\ h(n) &= [1.0 \quad 0.75 \quad 0.5 \quad 0.25] \end{aligned}$$

При $n=0$ сумата на конволюцията има само едно ненулево произведение

$$y(0) = x(0)h(0) = 1$$

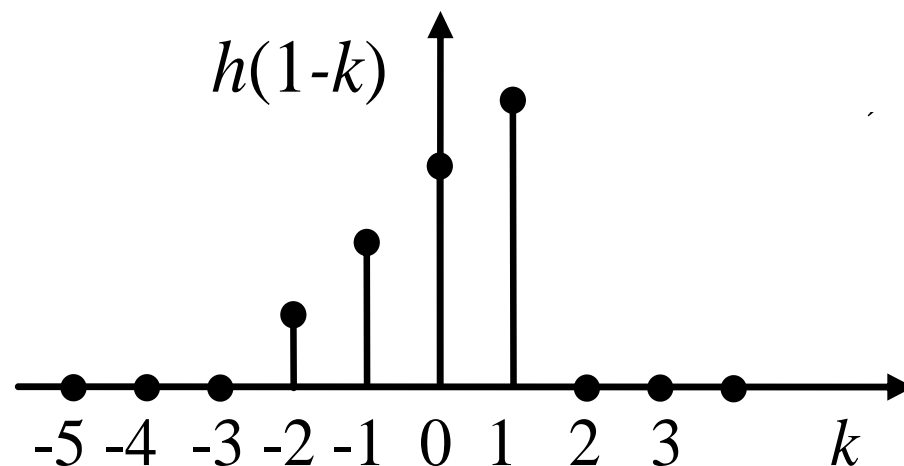
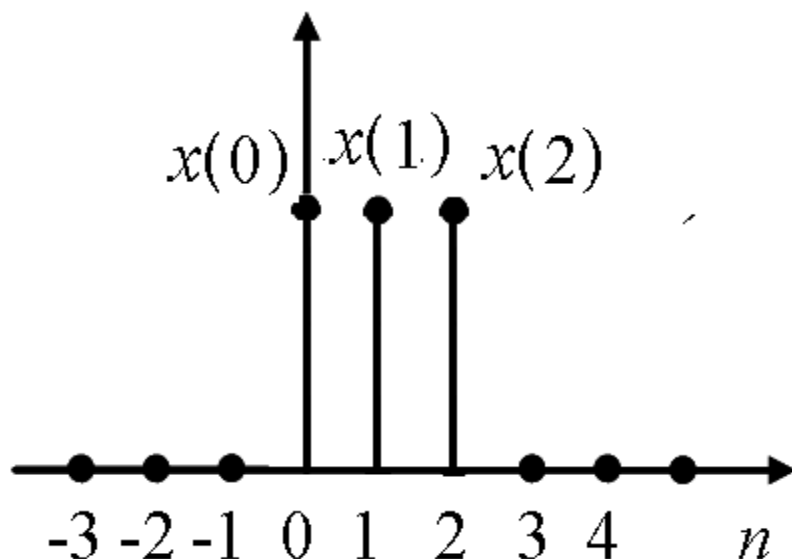


Пример: Изчисляване на реакцията на система посредством сумата на конволюцията

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \quad \begin{aligned} x(n) &= [1.0 \quad 1.0 \quad 1.0] \\ h(n) &= [1.0 \quad 0.75 \quad 0.5 \quad 0.25] \end{aligned}$$

При $n=1$ сумата включва две ненулеви произведения:

$$y(1) = x(0)h(1) + x(1)h(0) = 0.75 + 1 = 1.75$$

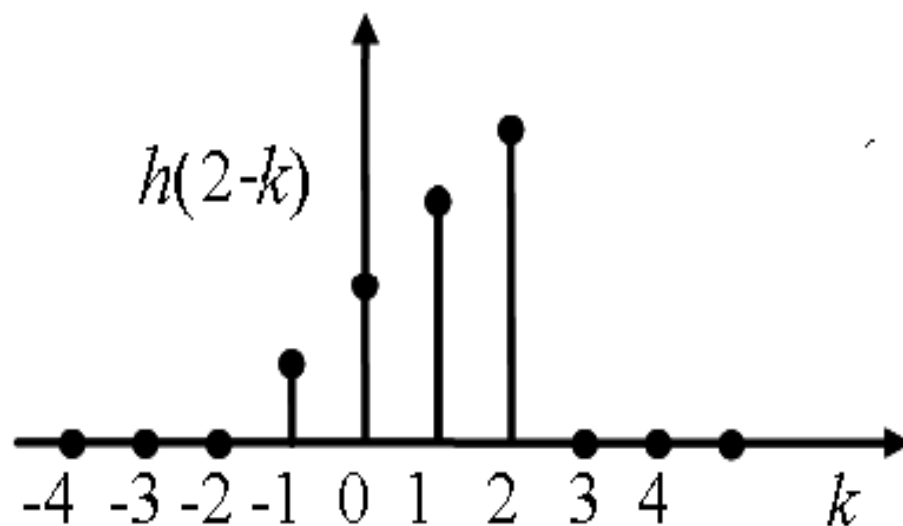
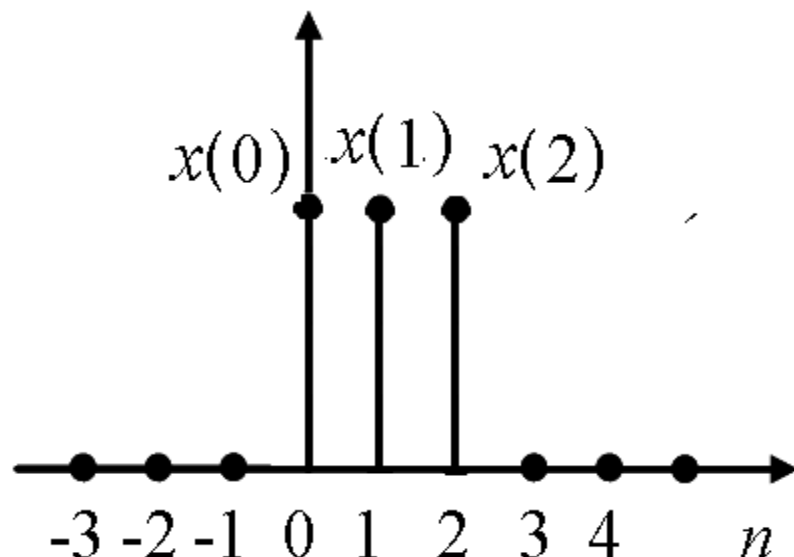


Пример: Изчисляване на реакцията на система посредством сумата на конволюцията

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \quad \begin{aligned} x(n) &= [1.0 \quad 1.0 \quad 1.0] \\ h(n) &= [1.0 \quad 0.75 \quad 0.5 \quad 0.25] \end{aligned}$$

При $n=2$ сумата включва три ненулеви произведения:

$$y(2) = x(0)h(2) + x(1)h(1) + x(2)h(0) = 0.5 + 0.75 + 1 = 2.25$$

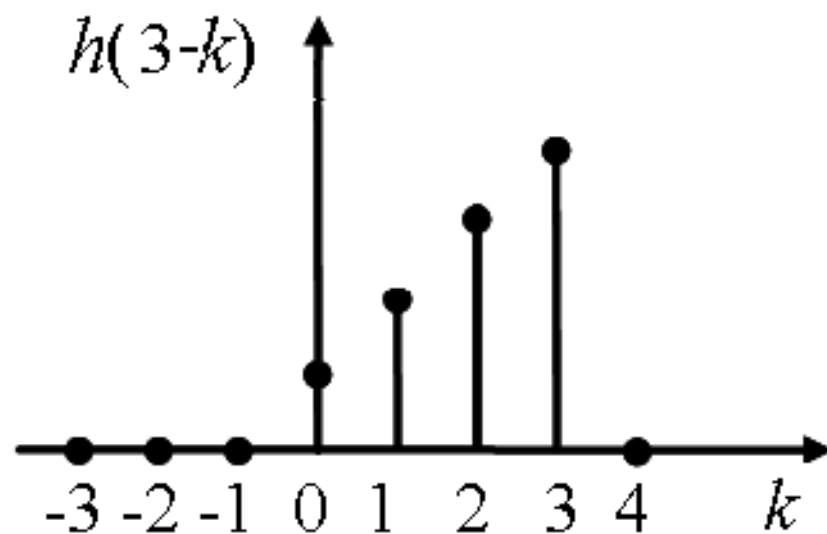
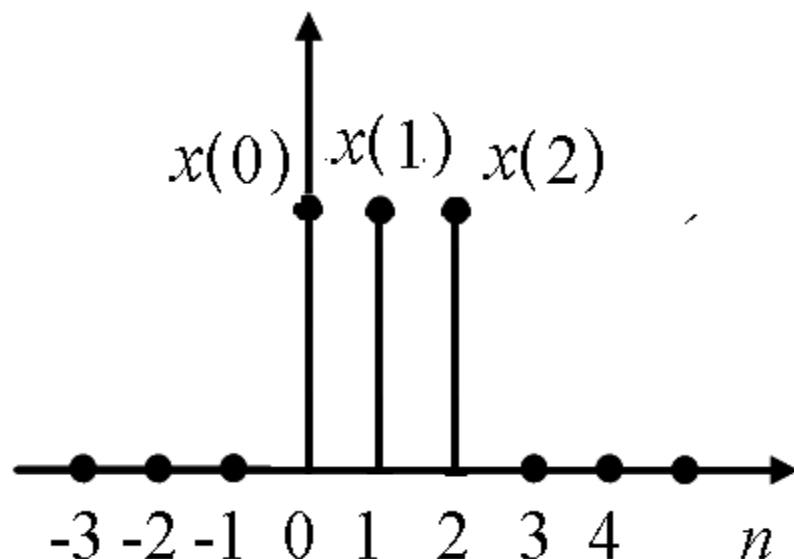


Пример: Изчисляване на реакцията на система посредством сумата на конволюцията

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \quad \begin{aligned} x(n) &= [1.0 \ 1.0 \ 1.0] \\ h(n) &= [1.0 \ 0.75 \ 0.5 \ 0.25] \end{aligned}$$

При $n=3$ сумата включва три ненулеви произведения:

$$y(3) = x(0)h(3) + x(1)h(2) + x(2)h(1) = 0.25 + 0.5 + 0.75 = 1.5$$

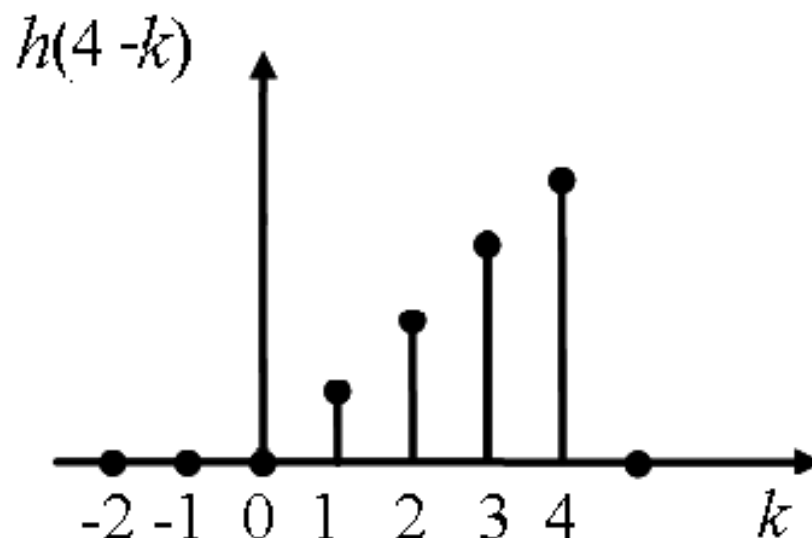
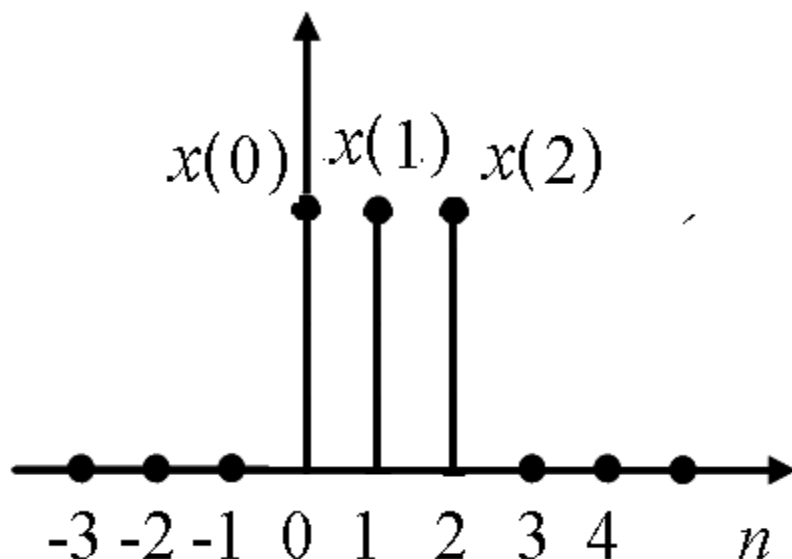


Пример: Изчисляване на реакцията на система посредством сумата на конволюцията

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \quad \begin{array}{l} x(n)=[1.0 \quad 1.0 \quad 1.0] \\ h(n)=[1.0 \quad 0.75 \quad 0.5 \quad 0.25] \end{array}$$

При $n=4$ сумата включва две ненулеви произведения:

$$y(4) = x(1)h(3) + x(2)h(2) = 0.25 + 0.5 = 0.75$$

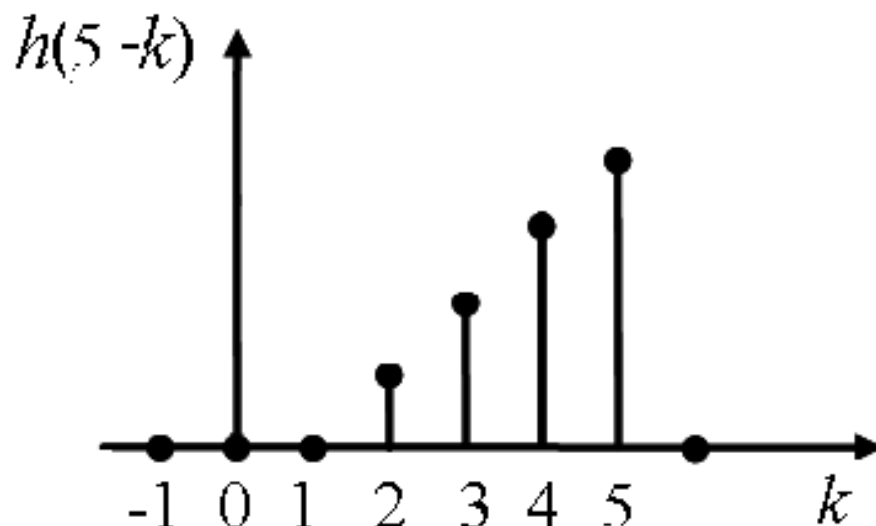
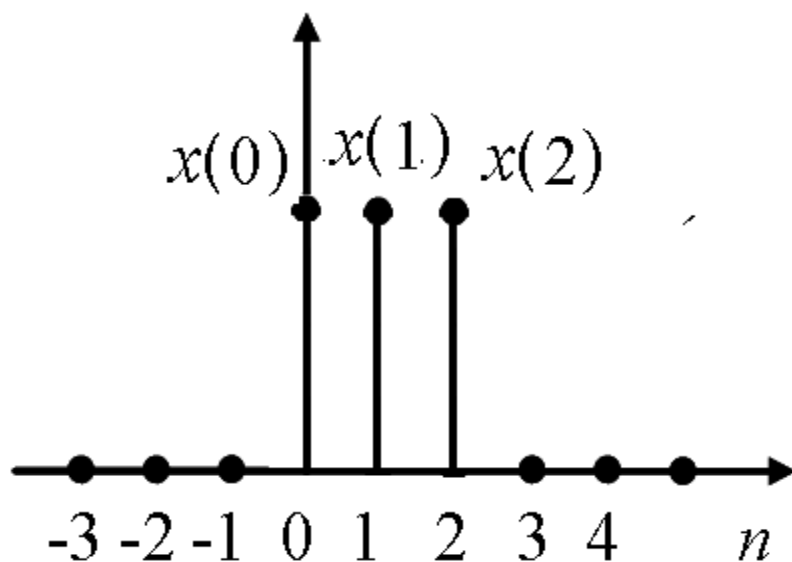


Пример: Изчисляване на реакцията на система посредством сумата на конволюцията

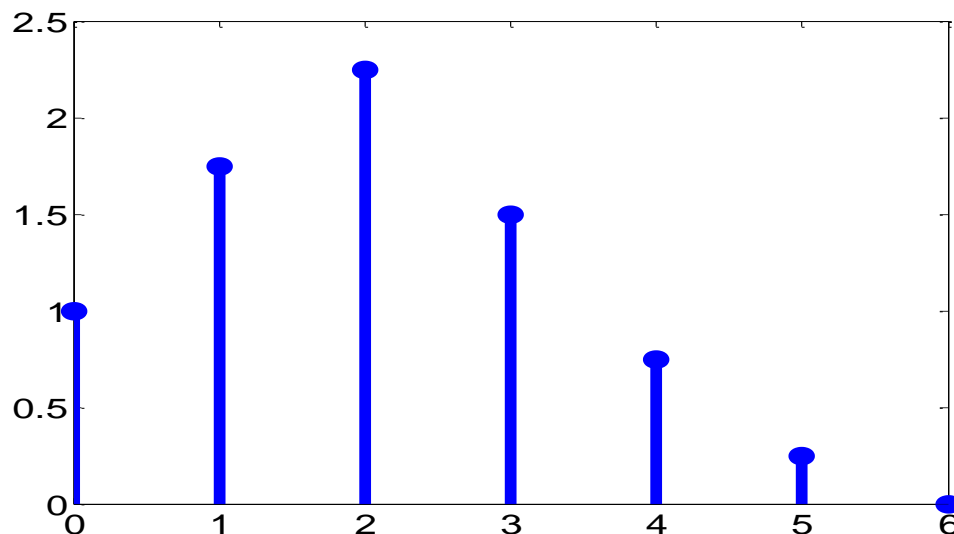
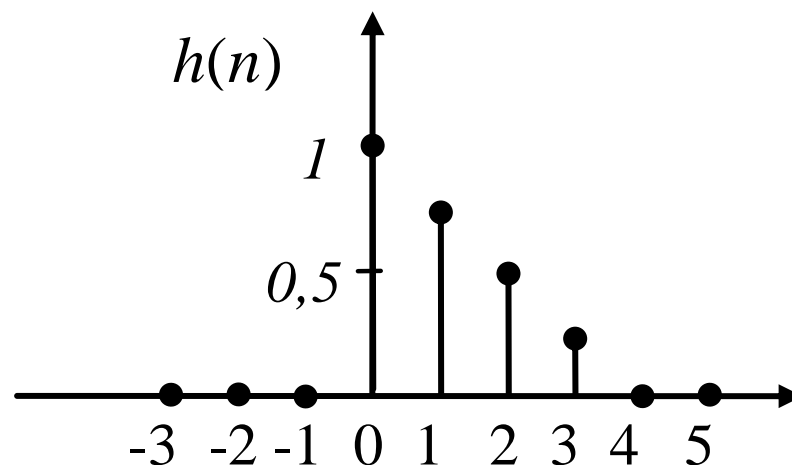
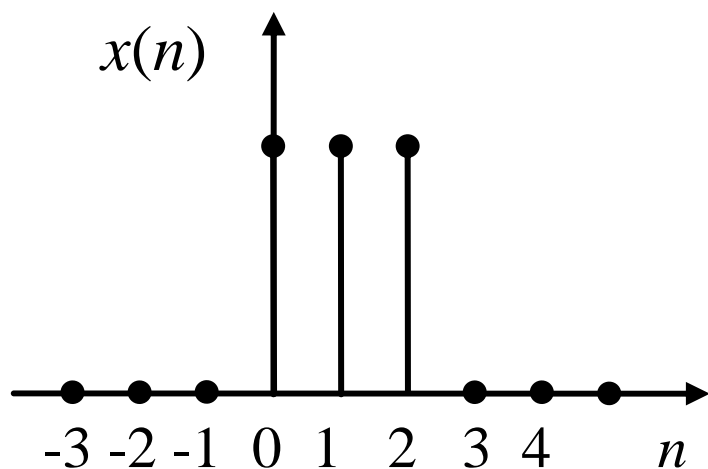
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \quad \begin{array}{l} x(n)=[1.0 \quad 1.0 \quad 1.0] \\ h(n)=[1.0 \quad 0.75 \quad 0.5 \quad 0.25] \end{array}$$

При $n=5$ сумата включва едно ненулево произведение:

$$y(5) = x(2)h(3) = 0.25$$



Пример: Изчисляване на реакцията на система посредством сумата на конволюцията



- $y(0) = 1.00$
- $y(1) = 1.75$
- $y(2) = 2.25$
- $y(3) = 1.50$
- $y(4) = 0.75$
- $y(5) = 0.25$

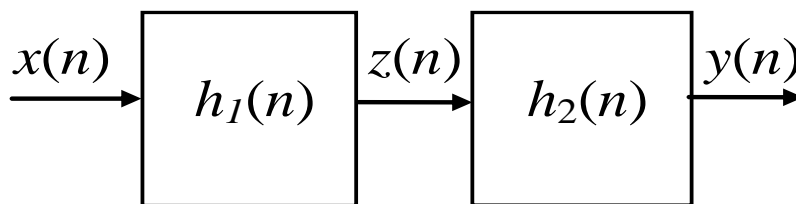
Свойства на конволюцията

■ Комутативност

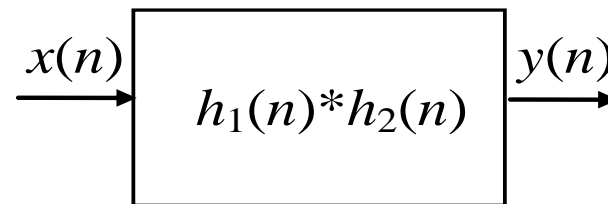
$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

■ Асоциативност

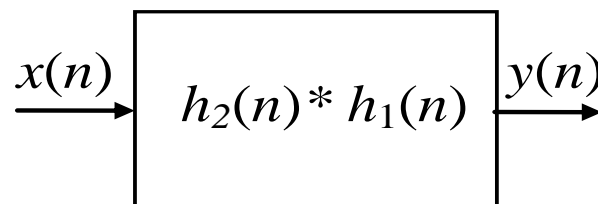
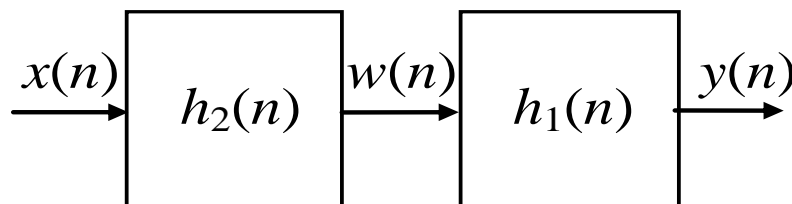
$$y(n) = \{x(n) * h_1(n)\} * h_2(n) = x(n) * \{h_1(n) * h_2(n)\}$$



a)



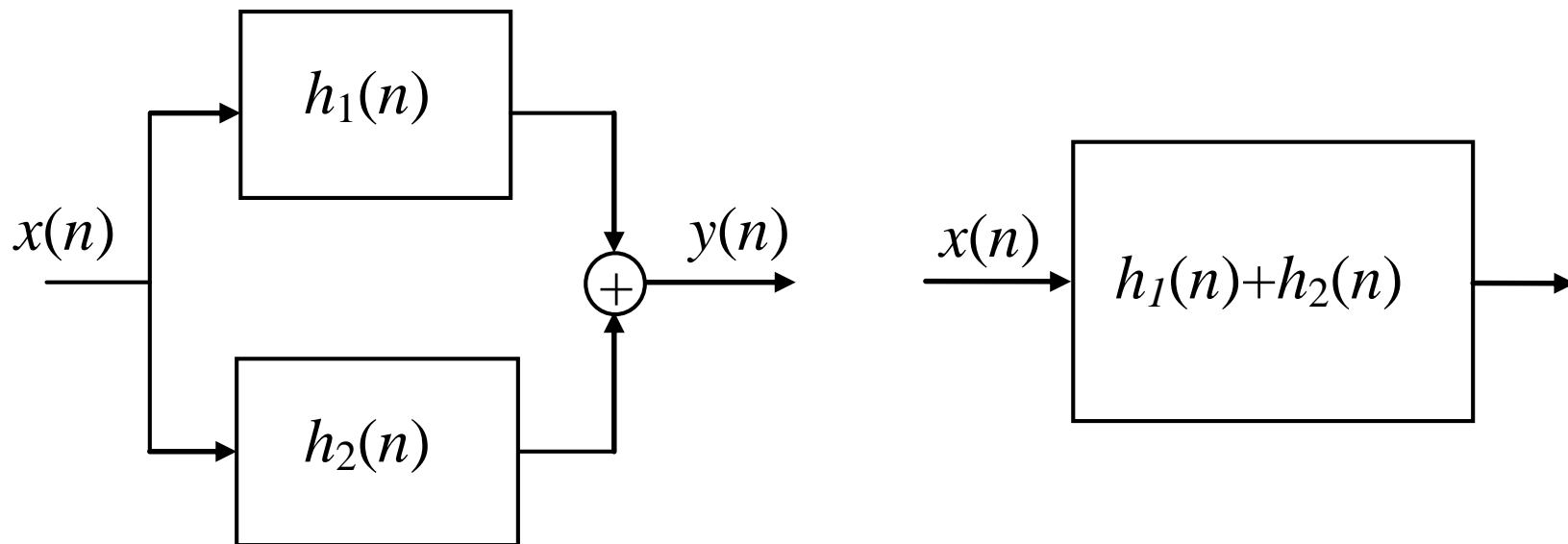
b)



Свойства на конволюцията

■ Дистрибутивност

$$y(n) = x(n) * \{h_1(n) + h_2(n)\} = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$$



Свойства на конволюцията

- Сума на конволюцията за каузална система

При каузалните системи изходният сигнал $y(n)$ не зависи от стойностите на входния сигнал $x(n)$ при $k > n$. Тогава сумата на конволюцията може да се запише като

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)h(n-k) \quad \text{или} \quad y(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

За случаят когато входния сигнал $x(n)$ е каузална редица, сумата на конволюцията се редуцира до

$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(k)h(n-k) = \sum_{k=0}^n h(k)x(n-k)$$

Свойства на конволюцията

- За случая когато редиците $x(n)$ и $h(n)$ са каузални и с крайна дължина N_x и N_h , а извън тези интервали имат нулеви стойности можем да изчислим че изходната редица $y(n)$ също ще бъде крайна редица съдържаща $N_y = N_x + N_h - 1$ ненулеви елемента

$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(k)h(n-k) = \sum_{k=0}^n h(k)x(n-k)$$

за стойности на независимата променлива $n = 0, 1, 2, \dots, N_y - 1$

Импулсна характеристика и сума на конволюцията за цифрова ДЛИВ система

■ Импулсна характеристика на системи без памет

Нека да си припомним че система без памет се дефинира като

$$y(n) = A x(n) \text{ а също така че}$$

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(n-k)$$

Тогава можем да запишем

$$y(n) = Ax(n) = A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(n-k) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) A \delta(n-k) =$$

$$= x(n) * A \delta(n).$$

Импулсна характеристика и сума на конволюцията за цифрова ДЛИВ система

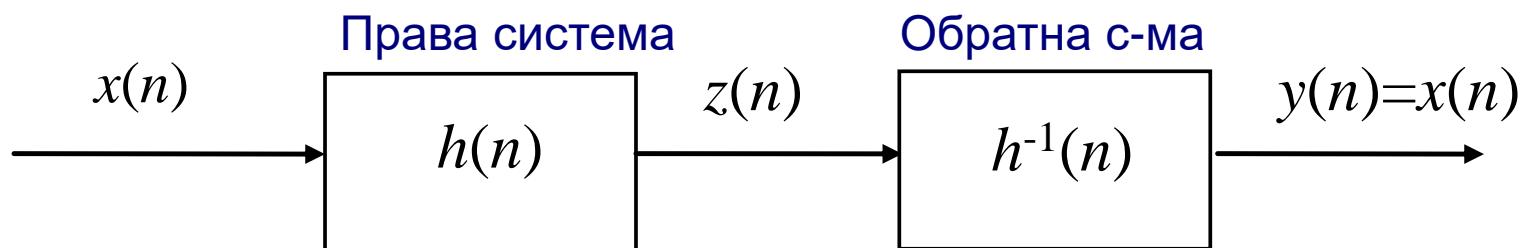
$$y(n) = x(n) * A\delta(n)$$

т.е. импулсната характеристика на система без памет е мащабиран единичен импулс:

$$h(n) = A \delta(n)$$

Импулсна характеристика и сума на конволюцията за цифрова ДЛИВ система

- Импулсна характеристика на последователно свързани права и обратна системи



Ако система с импулсна х-ка $h(n)$ е обратима, и означим обратната система с $h^{-1}(n)$, то $y(n) = x(n) * h(n) * h^{-1}(n)$, след прилагане на СВОЙСТВОТО АСОЦИАТИВНОСТ

$$y(n) = \{x(n) * h_1(n)\} * h_2(n) = x(n) * \{h_1(n) * h_2(n)\}$$

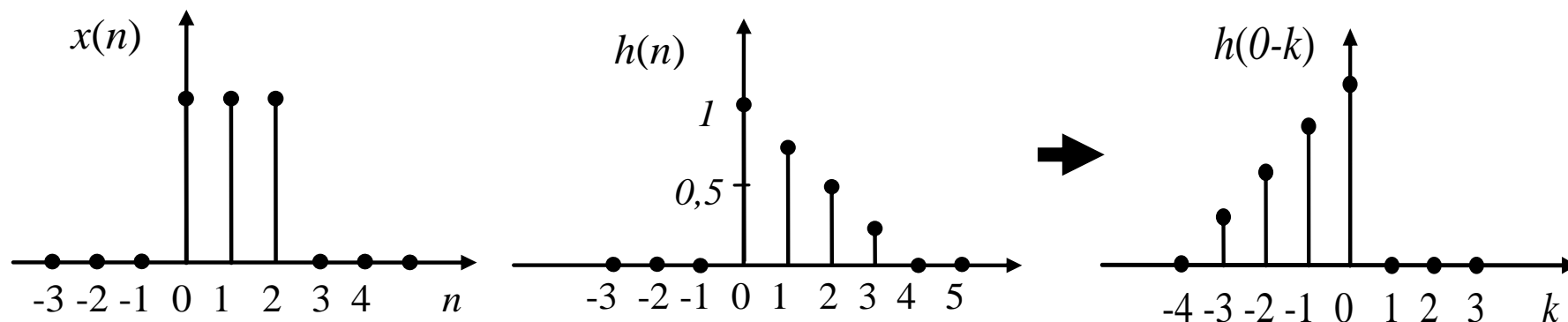
за последователно свързани права и обратна система получаваме

$$y(n) = x(n) * h(n) * h^{-1}(n) = x(n) * \delta(n) = x(n), \text{ т.к. } h(n) * h^{-1}(n) = \delta(n).$$

Импулсна характеристика и сума на конволюцията за цифрова ДЛИВ система

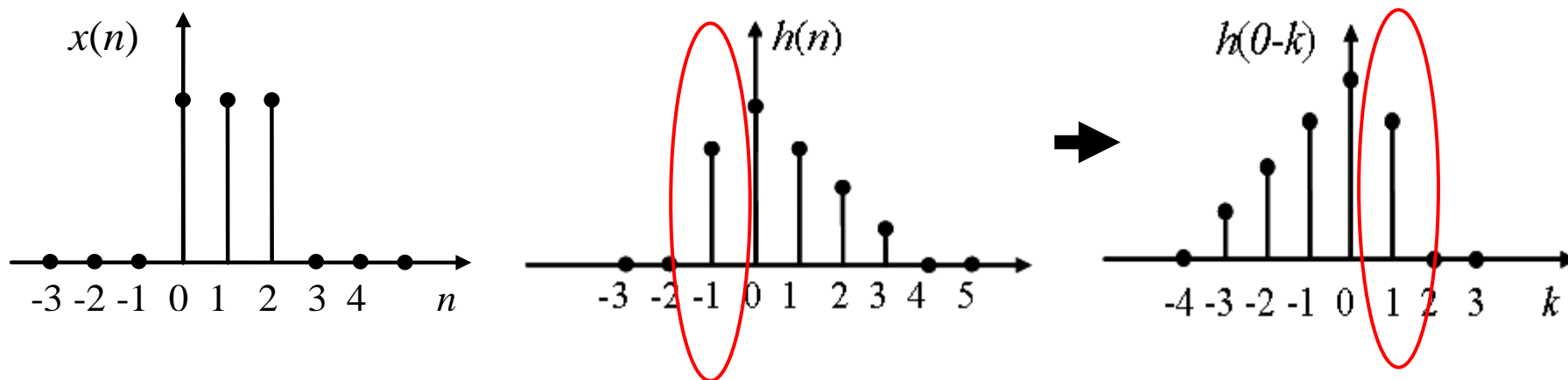
■ Импулсна характеристика на каузални системи

Импулсната характеристика на каузална система е каузална редица: изходът на системата, $y(n)$, за всяка стойност на независимата променлива n зависи от текущите и предишни входни отчети и/или минали стойности на изходната величина, но не зависи от бъдещи стойности на входния сигнал.



Импулсна характеристика и сума на конволюцията за цифрова ДЛИВ система

За некаузална система импулсната характеристика не е каузална редица:



За $n=0$ сумата на конволюцията се състои от две ненулеви произведения:

$$y(0) = x(0)h(0) + x(1)h(-1)$$

Импульсна характеристика и сума на конволюцията за цифрова ДЛИВ система

■ Импульсна характеристика на устойчива система

Една система е устойчива ако при ограничен входен сигнал, $x(n)$, с крайна дължина, изходния сигнал, $y(n)$, също е ограничен.

За ограничен входен сигнал $x(n)$ е в сила: $|x(n)| < A$.

Тогава модула на изхода, $y(n)$, за система с ограничен входен сигнал, $x(n)$, може да се запише като:

$$\begin{aligned} |y(n)| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) h(n-k) \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)| \cdot |h(n-k)| < A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(n-k)| = A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)|. \end{aligned}$$



Импулсна характеристика и сума на конволюцията за цифрова ДЛИВ система

Оттук следва условието че за устойчивостта на система е достатъчно сумата на импулсната характеристика да бъде крайна:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |h(k)| < \infty$$

Доказано е че това е необходимо и достатъчно условие за устойчивостта на ДЛИВ система.

Импулсна характеристика и сума на конволюцията за цифрова ДЛИВ система

- Връзка между импулсната и преходната характеристики на ДЛИВ система

Реакцията на системата при входен сигнал единичен скок, $u(n)$, се нарича преходна характеристика и ще я означим

$$q(n) = u(n) * h(n).$$

Импулсна характеристика и сума на конволюцията за цифрова ДЛИВ система

Отчитайки зависимостта за сумата на конволюцията

$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(k)h(n-k) = \sum_{k=0}^n h(k)x(n-k)$$

получаваме:

$$q(n) = \sum_{k=0}^n h(k)$$

Съдържание на Тема #2

- Дискретни във времето сигнали, редици
- Типове цифрови системи
- Импулсна характеристика и сума на конволюцията за цифрова ДЛИВ система
- Разликови уравнения за дискретна ЛИВ система
- Системи с КИХ и БИХ
- Графично представяне на архитектури базирани на различни варианти на разликовите уравнения

Разликови уравнения на ДЛИВ система



ДЛИВ системите се описват във времевата област посредством линейни разликови уравнения с постоянни коефициенти a_k и b_k като

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

Това представяне е удобно за описанието на поведението на системата във времевата област и за изчисляването на реакцията на системата. Редът се на системата се определя от по-голямото от двете числа N и M .

Трябва ясно да се отбележи че:

1. Разликовите уравнения описват цифрови системи
2. Диференциалните уравнения описват аналогови системи

Разликови уравнения на ДЛИВ система

Друга по-често използвана форма на разликовото уравнение се получава чрез нормализиране на по отношение на a_0 , така че $a_0=1$. Това се постига чрез разделяне на двете страни на уравнението с a_0

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad | : a_0$$

което се разписва като:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

т.е. цифровата система решава разликово уравнение за да получи изходния сигнал, $y(n)$, посредством операциите събиране, умножение и преместване във времето на един такт (т.е. закъснение с един такт).

Разликови уравнения на ДЛИВ система



$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

За да бъде изчислен изходния сигнал, $y(n)$, е необходимо да бъдат известни коефициентите a_k и b_k , а също така M предишни стойности на входния сигнал, $x(n)$, и N предишни стойности на изхода $y(n-k)$.

Този тип разликови уравнения и цифровите системи които те представят се наричат **рекурсивни**, т.к. изходния сигнал в настоящият момент от времето зависи (пряко) от предишни стойности на изходния сигнал.

На практика най-често анализът се извършва за каузална система и каузални входни редици, поради което за стойности на независимата променлива $n < \max(M, N)$, всички предшестващи стойности на входния и изходния сигнал се приемат за равни на нула, т.е. приемаме нулеви начални условия.

Разликови уравнения на ДЛИВ система



$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

Импулсната характеристика на системи с обратна връзка има безкраен брой ненулеви членове, поради което тези системи се наричат системи с **безкрайна импулсна характеристика (БИХ)**.

Когато $N > 0$, имаме най-малко един ненулев коефициент a_k (в допълнение към a_0), т.е. свободната съставляща на решението ще има поне един експоненциален член, който е безкраен във времето.

Разликови уравнения на ДЛИВ система



При специалния случай $N=0$, т.е. когато всички коефициенти a_k (с изключение на a_0) са равни на нула, уравнението

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

се преобразува в

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

Изходният сигнал, $y(n)$, на съответстващата ДЛИВ система е тегловна сума от текущият и M предшестващи отчета от входния сигнал $x(n)$, т.е. не зависи от обратна връзка. Следователно ДЛИВ системата описана с това разликово уравнение се нарича нерекурсивна система.

Разликови уравнения на ДЛИВ система

Разликово уравнение

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

съответства на сумата на конволюцията за каузална система и каузален входен сигнал

$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(k)h(n-k) = \sum_{k=0}^n h(k)x(n-k)$$

така че можем да приемем че коефициентите $b_0, b_1, b_2, \dots, b_M$ съответстват на отчетите от импулсната характеристика $h(k)$ за стойности на независимата променлива $k = 0, 1, 2, \dots, M$.

Поради тази причина тези системи се наричат системи с **крайна импулсна характеристика (КИХ)**.

Разликови уравнения на ДЛИВ система



КИХ системите имат някои полезни свойства, като например *линейна фазова характеристика и безусловна устойчивост*.
Защо?

В този смисъл, КИХ системите са уникални и нямат аналог сред непрекъснатите системи.

Безусловната устойчивост на КИХ системите следва от факта че изходния сигнал не зависи от предишни стойности на изхода, така че КИХ са системи без обратна връзка, или отворени (open-loop) системи.

Освен това, устойчивостта на КИХ системите следва директно от условието за стабилност на ДЛИВ система:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |h(k)| < \infty$$

Разликови уравнения на ДЛИВ система



Да си припомним примера за цифровия суматор (акумулатор):

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$$

След несложни преобразувания разликовото уравнение на акумулатора може да се запише във вида

$$y(n) = y(n-1) + x(n)$$

Това разликово уравнение представлява рекурсивната форма на акумулатора и разкрива защо акумулатора не е устойчива система.

Съдържание на Тема #2

- Дискретни във времето сигнали, редици
- Типове цифрови системи
- Импулсна характеристика и сума на конволюцията за цифрова ДЛИВ система
- Разликови уравнения за дискретна ЛИВ система
- Системи с КИХ и БИХ
- Графично представяне на архитектури базирани на различни варианти на разликовите уравнения

Представяне на разликовите уравнения с блокова диаграма

Разликовите уравнения във вида

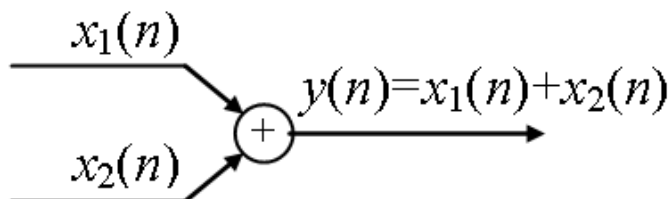
$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

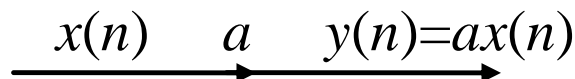
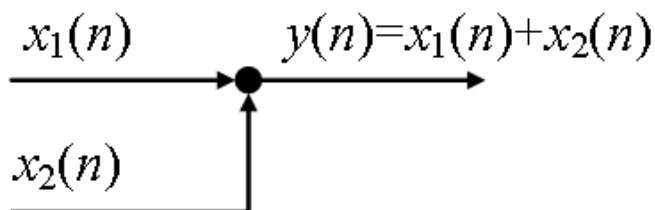
директно описват последователността от елементарни математически операции които ДЛИВ система извършва върху входния сигнал за да изчисли изходният сигнал.

Представяне на разликните уравнения с блокова диаграма

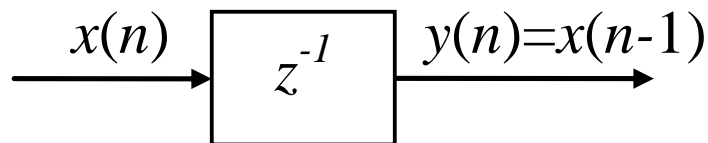
Тези операции се представят графично като



– сумиране на два сигнала в момент от времето n



– мащабиране



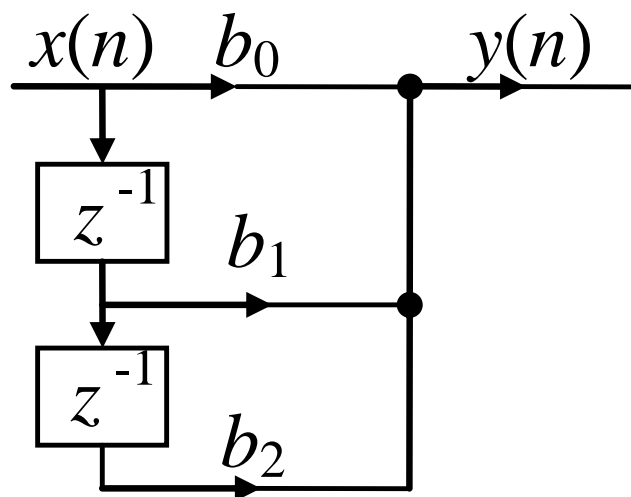
– изместване във времето на един период на дискретизация (T_s)

Представяне на разликовите уравнения с блокова диаграма

Пример 1: Система с КИХ от втори ред представена от разликовото уравнение:

$$y(n) = \sum_{k=0}^2 b_k x(n-k) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$$

се изобразява с блоковата структура



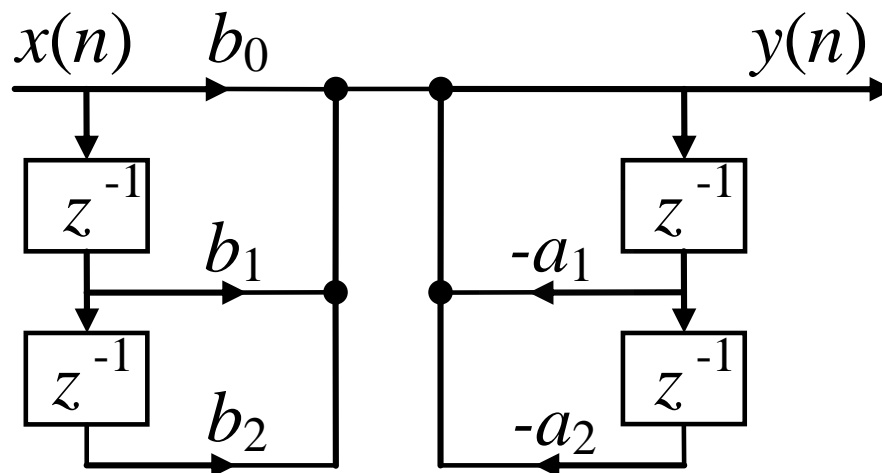
Представяне на разликовите уравнения с блокова диаграма

Пример 2: Система с БИХ от втори ред представена с разликовото уравнение:

$$y(n) = \sum_{k=0}^2 b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^2 a_k y(n-k) =$$

$$= b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2)$$

се представя със следната структура



Възможни въпроси за теста

- Кои са условията дискретна редица да е с ограничена мощност?
- Как се променя честотата на колебание f на експоненциална комплексна редица при монотонно нарастване на нормализираната кръгова честота Ω ?
- Какъв е броят на хармонично свързаните комплексни експоненциални редици?
- При какви условия една реална цифрова система може да се разглежда като не-каузална?
- Какво е необходимото и достатъчно условие за една ДЛИВ система да бъде устойчива?
- По какво се различават рекурсивните и нерекурсивните системи?
- Какво е условието за получаване на периодична дискретна редица при равномерна дискретизация на непрекъснат периодичен сигнал?